Acad. **Nicolae Teodorescu**
Prof. dr. **Valter Olariu**

Ecuații diferențiale și cu derivate parțiale

Volumul I

Ecuaţii diferenţiale

Editura tehnică
București — 1978

Lucrarea cuprinde unele din aspectele esențiale ale teoriei ecuațiilor diferențiale, scopul ei fiind de a familiariza studenții matematicieni, fizicieni, politehnicieni precum și pe cercetători și ingineri cu metodele teoretice și practice ale acestei discipline matematice, pentru a fi apoi aplicate în practică.

Sînt studiate ecuațiile și sistemele diferențiale, unele funcții speciale și sînt expuse ideile de bază din teoria metodelor numerice de rezolvare a ecuațiilor diferențiale, ale teoriei stabilității, unele proprietăți calitative ale soluțiilor ecuațiilor diferențiale.

Lectura cărții presupune doar unele cunoștințe de analiză matematică și algebră liniară.

Redactor : **Valentina Crețu**
Tehnoredactor : **Elena Geru**
Coperta și supracoperta : **Theodora Dexan**

Bun de tipar: 28.04.1978. Coli de tipar: 23,5. Tiraj: 6700+20+65 exemplare C.Z. 517.944/947

c. 1518 I. P. „INFORMAȚIA"
Str. Brezoianu nr. 23—25
București

Prefață

Descoperirea calculului infinitezimal conține în germene și pe aceea a ecuațiilor diferențiale în numeroasele și variatele probleme, în special cu caracter geometrico-cinematic, care se puneau atît lui Newton și Leibniz, cît și celor ce se avîntau în fructificarea ideilor lor geniale. Desigur, rezolvarea acestor probleme urma căi particulare, dar acumulările cantitative trebuia să conducă la salturi calitative.

Încă spre sfîrșitul secolului al XVII-lea se frămîntau procedee de integrare a unor ecuații diferențiale particulare. Astfel, în 1691, Jean Bernoulli introdusese un factor integrant, iar în 1693—folosise metoda variației constantelor.

Totuși, matematicienilor secolului al XVIII-lea le revine meritul de a fi pus în lumină studiul sistematic al ecuațiilor diferențiale și cu derivate parțiale, extinzînd reguli descoperite anterior și precizînd într-o măsură semnificativă condițiile de aplicare a acestor reguli, fără însă a se pune problema condițiilor de existență a soluțiilor. Un capital bogat și atrăgător prin noutatea și frumusețea rezultatelor se acumulează de-a lungul secolului al XVIII-lea, care cunoaște integrarea ecuațiilor diferențiale cu coeficienți constanți prin Euler în 1750.

Caracterul monografic al cercetărilor este impresionant, chiar cînd este văzut cu ochii obișnuiți cu descoperirile surprinzătoare din secolul al XX-lea. Într-adevăr, încă în 1724, Riccati pune în lumină celebra și mereu actuala sa ecuație, căreia îi găsește soluții în anumite cazuri particulare, adică soluții cvadraturi, fiindcă în concepția secolului al XVIII-lea se urmărea cu perseverență această cale ca fiind cea mai naturală de întoarcere de la derivată la funcție. Tot în acea epocă, d'Alembert pune în lumină reducerea unor ecuații la sisteme echivalente cu care pot fi rezolvate.

Dar calea rodnică a descoperirilor prețioase nu este lipsită de bariere. Taylor întrevăzuse cîndva existența soluțiilor singulare, dar lui Clairaut îi revine meritul de a o confirma prin ecuația care îi poartă numele,

inițiind pentru integrarea acesteia metoda derivării ecuației. Dificultățile cauzate de fenomenul soluțiilor singulare stimulează pe Euler, Laplace, Lagrange și Monge să le cerceteze cu rezultate care aduc lumini noi și elucidări satisfăcătoare. Instrumentul cvadraturii începe să devină restrictiv, astfel încît Euler descoperă seria hipergeometrică pe care o adoptă ca nou instrument pentru integrarea ecuației hipergeometrice de ordinul al doilea. Tot Euler, urmînd calea descoperirii de funcții speciale, introduce celebrele sale funcții $\Gamma(z)$ *și* $B(p, q)$.

Teoria factorului integrant elaborată de Euler conduce pe acesta și pe Lagrange, pe baza criteriilor de integrabilitate studiate de Clairaut, Fontaine și Euler, la studiul ecuațiilor cu diferențiale, care pun în evidență existența unor tipuri care nu satisfac criteriul de integrabilitate. Semnificația acestor tipuri stimulează curiozitatea lui Monge care le precizează semnificația geometrică, deschizînd calea pe care o va urma mai tîrziu Pfaff.

Dezvoltarea tumultoasă a științei în secolul al XIX-lea se regăsește și în dezvoltarea matematicii care este intensă, variată și adesea surprinzătoare. Grija pentru rigoare, pentru folosirea judicioasă a raționamentului logic deductiv și tendința manifestată spre abstractizare se găsește prezentă în numeroase lucrări și crește continuu îndreptînd drumul investigației matematice spre formalizarea care va apărea și înflori în secolul nostru. Dar în același timp apare o nouă orientare care va face din matematică un instrument de investigație modelator și un liant al multor discipline din alte ramuri ale științei. Este vorba de crearea și dezvoltarea vertiginoasă a fizicii matematice, *care sugerează și solicită instrumente matematice și se constituie ca o corecție de* modele matematice, *dintre care multe se vor lega între ele tocmai prin liantul pe care îl constituie gîndirea matematică aplicată cercetării teoretice deductive în alte domenii ale cunoașterii. Vor apărea instrumente matematice comune la mai multe categorii de fenomene fizice și acestea vor fi ecuații diferențiale și cu derivate parțiale, modelatoare ale unor fenomene distincte. Iată deci, apariția unor instrumente unificatoare care vor da de gîndit atît matematicienilor, cît și beneficiarilor și utilizatorilor acestor instrumente.*

Vom putea caracteriza gîndirea matematică a secolului al XIX-lea prin două tendințe complementare, prima spre edificarea unor teorii din ce în ce mai abstracte, mai integrate în patrimoniul specific al matematicii, mai epurate de termeni și ipoteze extramatematice, cea de-a doua, spre modelarea matematică a fenomenelor concrete din realitatea obiectivă. Aparent aceste tendințe se găsesc în opoziție, dar în realitate ele se completează, cea de-a doua furnizînd cercetării matematice teme sigure și fecunde de inspirație, așa cum istoria generală a științei o dovedește permanent, iar prima aducînd rigoarea și siguranța, generalitatea și

lărgimea de concepție în investigarea fenomenelor complexe din realitatea obiectivă. Din acest punct de vedere, secolul al XIX-lea pregătește prin revoluții succesive, care se aprind pretutindeni în știință marea revoluție tehnico-științifică a secolului al XX-lea.

Dezvoltarea studiului ecuațiilor diferențiale și cu derivate parțiale ilustrează cu strălucire mersul gîndirii matematice a secolului al XIX-lea. Într-adevăr, rezolvarea acestor ecuații a preocupat pe toți marii analiști ai secolului al XVIII-lea, pornind de la modelele constante pentru fenomenele mecanice și fizice. Mecanica analitică și fizica matematică au impulsionat studiul și au condus la crearea teoriei ecuațiilor diferențiale și cu derivate parțiale. O teorie generală trebuia întemeiată pe noțiuni bine definite și de suficientă generalitate pentru a deschide un cadru sigur și larg teoriei. În același timp aceste definiții trebuia să țină seama de caracterul modelator al ecuațiilor diferențiale și cu derivate parțiale a căror apariție se datora cerințelor de modelare adunate de geometrie, mecanică și fizica matematică, pe care marii analiști și enciclopediști ai secolului al XVIII-lea le luaseră cu pasiune și convingere ca surse de inspirație.

Noțiunea de integrală generală nu era încă elucidată și chiar nici cea de integrală, întrucît nu se precizează încă cerințele și nu se știa și dacă acestea nu sînt fixate, se poate ca integrala căutată să nu existe deloc. Problema găsirii unei integrale unice în condiții prefixate nu se punese, deși dinamica newtoniană era deterministă ca și fizica matematică.

Cel care a avut viziunea generală, novatoare a teoriei ecuațiilor diferențiale și cu derivate parțiale a fost Cauchy. Acesta, în loc de a căuta integrala generală sub forma unei familii cu un număr cît mai mare de parametri, pune problema existenței unei integrale dintr-o categorie prefixată, care satisface anumite condiții inițiale, pentru o anumită valoare dată variabilei independente, variabilă care modela timpul. Prin urmare, Cauchy a dat integralei ordinare semnificația de model matematic, al unui fenomen dinamic într-un sistem material discret, ca mișcare a unei particule a unui corp ceresc redus la dimensiuni neglijabile, dar înzestrat cu o masă, sau a unui sistem de astfel de corpuri. Determinismul acestei concepții ilustrează determinismul newtonian, fiindcă în condițiile impuse de Cauchy la momentul inițial se urmărește stabilirea nu numai a existenței, ci și a unicității integralei.

Unde mai este atunci integrala generală a secolului al XVIII-lea ? Aceasta nu dispare, ci capătă o semnificație geometrico-fizică modelatoare : este mulțimea integralelor care corespund alegerii arbitrare a condițiilor inițiale pentru orice moment ales ca moment inițial într-un interval de timp prefixat. Dacă se numără parametrii astfel introduși ca date inițiale ale lui Cauchy, se regăsesc parametrii integralei generale a ecuațiilor diferențiale în sensul secolului al XVIII-lea. Se regăsesc, dar acum au semnifi-

cații modelatoare, ridică probleme de existență, de compatibilitate, de unicitate și chiar de apartenență la categorii prefixate.

Cauchy a dat demonstrația teoremei de existență a soluțiilor ecuațiilor diferențiale în cursuri făcute încă înainte de 1830, dar această demonstrație a fost făcută publică de abia în 1844 de abatele Moigno, iar Lipschitz o regăsește precizînd condiții suficiente în care este valabilă în 1868. Condițiile lui Lipschitz au căpătat din ce în ce mai multă importanță și au rămas actuale și astăzi, dar este important să subliniem cît de tîrziu s-a gîndit cineva să controleze condițiile de existență, Cauchy însuși care a avut ideea genială de a pune problema existenței soluțiilor nu avusese și pe aceea de a se întreba în ce condiții această existență poate fi asigurată.

Teoria ecuațiilor diferențiale, ca și cea a ecuațiilor cu derivate parțiale, a avut de la început ca obiectiv principal rezolvarea acestora, intitulată „integrare", fiindcă se baza pe reprezentarea soluțiilor prin cvadraturi combinate cu diverse operații algebrice în număr finit. Dar în 1840, Liouville pune capăt iluziilor unei astfel de aspirații demonstrînd imposibilitatea integrării prin cvadraturi, în general.

Ca urmare a dezvoltării teoriei funcțiilor analitice, creație a lui Cauchy, Riemann și Weierstrass, s-a constituit teoria ecuațiilor diferențiale în domeniul complex spre sfîrșitul secolului al XIX-lea, în care Painlevé a adus contribuții capitale. În 1887 el stabilește natura algebrică a singularităților mobile ale ecuațiilor diferențiale algebrice de ordinul întîi, apoi pune bazele teoriei analitice a ecuațiilor diferențiale.

Problema celor trei corpuri cercetate de astronomi în secolul al XIX-lea prin serii trigonometrice dă prilej lui Poincaré să demonstreze divergența acestor serii și îl conduce la noțiunea de dezvoltare asimptotică, a cărei importanță în studiul ecuațiilor diferențiale liniare analitice este capitală în special în problema singularităților acestora.

Calea urmată în secolul al XIX-lea în cercetarea ecuațiilor diferențiale se baza, chiar fără să fie precizată, în special pe regularitatea, ba chiar pe analiticitatea ecuațiilor și soluțiilor. Intervenția lui Lipschitz va fi valorificată mai tîrziu cînd analiza va aborda studiul funcțiilor într-un cadru mai larg, cel al funcțiilor de variabile reale. Revine secolului al XX-lea sarcina de a aprofunda efectele renunțării la analitici tate, apoi chiar și la derivabilitate și la continuitate.

În 1890 Peano și Arzela demonstrează existența soluțiilor ecuației diferențiale $y' = f(x, y)$ *unde* f *este continuă numai într-un domeniu* D, *în vecinătatea unui punct* $(x_0, y_0) \in D$, *iar Montel în 1907 reia problema folosind liniile poligonale ale lui Cauchy. Existența este asigurată, dar nu și unicitatea. Aceasta se poate obține dacă mai cedăm ceva din generalitatea impunînd, de exemplu, o condiție Lipschitz. Aducînd arsenalului instrumentelor de investigație ale secolului al XX-lea metoda aproximațiilor succesive, intrată în 1890, Picard pune la dispoziția cercetătorilor secolului nostru asupra existenței soluțiilor mijloace puternice care nu cer decît continuitate și derivabilitate a funcțiilor de variabile reale folosite pentru studiul cantitativ al soluțiilor. Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale create de Poincaré începînd din 1880 stabilește o punte de trecere între secolul trecut și cel de față, punte care se termină cu un drum larg pe care se merge și astăzi. Aici apar soluții închise sau cicluri, soluții periodice și soluții asimptotice. În 1898 Hadamard pune în evidență importanța aspectelor topologice în studiul global al soluțiilor pornind de la problema geodezicelor închise. Începînd din 1913 Birkhoff dezvoltă teoria generală a sistemelor dinamice, atrăgînd atenția asupra ciclurilor lui Poincaré și asupra multor probleme ale topologiei ecuațiilor diferențiale. Studiul sistemelor diferențiale din punctul de vedere al stabilității sau instabilității soluțiilor, început de Leapunov în 1892, se lărgește prin Hadamard, Painlevé, Cotton, Birkhoff etc., iar Poincaré introduce invarianții integrali prin care pune în evidență stabilitatea în sensul lui Poisson.*

Tot în pragul secolului, în 1901, Cartan introduce noțiunea de formă diferențială invariantă a unui sistem diferențial punînd-o în strînsă legătură cu cea de invariant integral a lui Poincaré. În primele decenii ale secolului nostru, pe baza interpretării transformărilor de contact infinitezimale din plan dată de Sophus Lie, cu propagări de unde, se dezvoltă teoria lui Vessiot în care unda elementară leagă sistemele diferențiale de calculul variațional, de teoria ecuațiilor cu derivate parțiale de ordinul întîi și pune în evidență modele pline de conținut pentru dinamica analitică și fizica teoretică.

În 1898, Druch reia ideile lui Picard care constituise pentru ecuațiile diferențiale liniare o teorie analoagă teoriei lui Galois, introducînd pentru aceasta noțiunea de grup de raționalitate, *care este un grup continuu liniar. El pune astfel bazele unei teorii generale pe care o denumește integrarea logică. Vessiot demonstrează apoi riguros existența grupului de raționalitate. Importanța acestui mod de abordare a problemei integrării ecuațiilor diferențiale este deosebit de mare, fiindcă ea răspunde pe un plan superior problemei de bază a integrării acestor ecuații, pusă de la început de analiștii secolului al XVIII-lea. Astfel, Vessiot găsise încă din 1898 condițiile necesare și suficiente pentru ca o ecuație liniară să fie integrabilă prin cvadraturi, iar Lie arătase că în integrarea ecuațiilor diferențiale neliniare, aproape toate cazurile de reducere se obțin prin grupuri care lasă ecuația invariantă.*

Ideile lui Drach au permis lui Painlevé să atragă atenția asupra unor ecuații diferențiale care au ca soluții funcții transcendente noi ireductibile la altele cunoscute. Semnalînd această importantă direcție de cercetare globală a ecuațiilor diferențiale, vom observa că ea a fost reluată începînd

din 1932 de Ritt, care dezvolta aspectele profund algebrice ale ecuațiilor diferențiale în lumina orientării date la acea epocă și păstrate și în prezent matematicii spre cercetarea structurilor algebrice.

Începînd din cel de-al patrulea deceniu, odată cu edificarea analizei funcționale, apar noi metode și noi direcții de cercetare în teoria ecuațiilor diferențiale și cu derivate parțiale. Încă din primii ani ai secolului, Hilbert introduce metode funcționale în problemele de valori și funcții proprii, punînd în lumină spațiile hilbertiene, în care analogiile cu spațiile euclidiene sînt izbitoare și pasionante. Metoda clasică a separării variabilelor conduce la dezvoltări ale soluțiilor problemelor la limite în serii de funcții proprii ortogonale și se impune din ce în ce mai imperios considerarea spațiilor funcționale ale soluțiilor, de unde și extensiuni ale noțiunii de soluție prin renunțarea la existența derivatelor și considerarea fie de șiruri de soluții ordinare care converg în topologia spațiilor funcționale în care se consideră soluțiile, fie de operatori diferențiali generalizați prin operatori integrali și formule de reciprocitate. Se ajunge astfel la noțiunile de soluție generalizată, de soluție slabă și de soluție în sensul distribuțiilor.

O abordare modernă a teoriei ecuațiilor diferențiale și cu derivate parțiale nu poate neglija punctele de vedere, metodele și instrumentele funcționale, care au adus lumini noi și fecunde în această teorie, o unitate în tratare și în concepție, orizonturi noi și largi. Dar, în același timp, nu poate neglija sau trece sub tăcere linii de dezvoltare și rezultate anterioare legate de contribuția esențială a unor înaintași geniali care au desțelenit ținuturile pline de bogății inestimabile ale ecuațiilor diferențiale cu derivate parțiale și în general operaționale. Acestea constituie surse prodigioase de modele matematice ale unor fenomene caracteristice în toate formele de mișcare ale materiei, mecanice, fizice, biologice și în viața societății (economie, transporturi, telecomunicații, cibernetică, automatică etc.).

Considerarea ecuațiilor diferențiale ca modele impune abordarea sistematică a fenomenelor stabilindu-se interdependențe, interconexiuni și interreacții între modele, corespunzătoare celor din realitatea obiectivă. Faptul că aceeași ecuație sau același tip de ecuații modelează fenomene diferite ilustrează unitatea legilor generale ale realității obiective și deschide perspective fecunde cercetării matematice cu ajutorul acestor modele, precum și îndemnul de a le corela cu altele care intervin în cunoașterea aspectelor complexe ale fenomenelor.

Desigur că nici punctul de vedere al dezvoltării teoriei însăși ca parte constitutivă a sistemului format de cunoștințele, metodele și instrumentele matematice de investigație nu poate fi neglijat, ci, dimpotrivă, trebuie fructificat și ținut într-o lumină strălucitoare și permanentă

întrucît constituie mijloacele strategiei și tacticii descoperirii ca și ale modelării matematice.

Lucrarea de față este concepută în spiritul punctelor de vedere trecute în revistă în cele ce precedă, continuînd să îmbine într-un cadru sistemic cunoașterea teoretică a domeniului ecuațiilor diferențiale și modelarea cu ajutorul acestora. Aceasta nu are caracter enciclopedic, deci nu oferă cititorului tabloul complet al cunoștințelor din acest domeniu, ci urmărește o trecere cît mai puțin sinuoasă și mai lipsită de șocuri și discontinuități, într-o viziune unitară pe care o dorim și profitabilă, și — dacă este posibil — și agreabilă cititorului care o parcurge, chiar și folosindu-se de creion.

Volumul I sintetizează din punctul de vedere al modelării teoriilor dezvoltate asupra ecuațiilor diferențiale ordinare într-o viziune modernă. În consecință, ecuațiile respective sînt considerate ca relații ale fenomenelor în diferite sisteme din realitatea obiectivă, reprezentînd diverse forme unidimensionale de mișcare ale materiei. Astfel, în vederea caracterizării fenomenelor generale, soluțiile sînt considerate ca elemente ale unor spații funcționale adecvate, în care condițiile inițiale și la limită caracterizează diferite subspații. Se vede deci că aspectele calitative sînt prezentate ca proprietăți generale ale unor astfel de subspații, ceea ce permite interpretări și reprezentări sugestive.

Aici își găsesc locul polinoamele ortogonale și în general funcțiile speciale.

O serie de tehnici matematice sînt menite să aducă cititorului fondul de mijloace modelatoare care se vor regăsi identice sau analoage în tratarea ecuațiilor cu derivate parțiale.

Deși volumul nu este intitulat „Modelele matematice de tip diferențial", arhitectura lui este concepută în acest spirit pe care îl vom regăsi și în volumele următoare.

Autorii

Cuprins

1. Introducere 17

1.1. Ecuaţii diferenţiale şi modelarea matematică 17
1.2. Definiţii. Generalităţi 24

2. Ecuaţii diferenţiale scalare de ordinul întîi 29

2.1. Noţiuni generale 29
2.2. Ecuaţii exacte 32
2.3. Factor integrant 34
2.4. Utilizarea factorului integrant în integrarea ecuaţiilor diferenţiale de ordinul întîi 36
2.5. Ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi sub formă implicită 44
Exerciţii şi completări 49

3. Spaţii metrice. Spaţii vectoriale normate. Spaţii prehilbertiene 53

3.1. Spaţii metrice 53
3.2. Spaţii vectoriale normate 56
3.3. Spaţii prehilbertiene 58
3.4. Mulţimi compacte 60
3.5. Teorema de punct fix Banach 61

4. Existenţa şi unicitatea soluţiilor problemei Cauchy pentru ecuaţii şi sisteme diferenţiale 64

4.1. Cazul unei ecuaţii diferenţiale reale 64
4.2. Cazul unei ecuaţii diferenţiale complexe 66
4.3. Cazul unui sistem diferenţial real 68
4.4. Cazul unei ecuaţii diferenţiale de ordin n 69
4.5. Existenţa soluţiilor pentru ecuaţii diferenţiale cu puncte singulare . . . 74

5. Dependenţa soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale de condiţiile iniţiale şi de parametri 78

6. Metode aproximative şi metode numerice de integrare a ecuaţiilor diferenţiale 84

6.1. Metode aproximative de integrare a ecuaţiilor diferenţiale 84
6.2. Metode numerice în teoria ecuaţiilor diferenţiale 91

7. Transformări integrale în teoria ecuaţiilor diferenţiale 118

7.1. Transformarea Fourier 118
7.2. Transformarea Laplace 129
7.3. Transformările Fourier şi Laplace şi teoria distribuţiilor 143

8. Calculul operaţional 151

8.1. Ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi 151
8.2. Sisteme diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi 163
8.3. Ecuaţii diferenţiale neliniare 169
8.4. Ecuaţii integrale şi ecuaţii diferenţiale cu diferenţe 172
8.5. Ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi polinoame 177
8.6. Transformarea Fourier aplicată la integrarea ecuaţiilor diferenţiale . . 178
Exerciţii şi completări 180

9. Ecuaţii şi sisteme diferenţiale liniare 184

9.1. Noţiuni fundamentale 184
9.2. Teoria generală a sistemelor diferenţiale liniare 186
9.3. Metoda d'Alembert 193
9.4. Teoria generală a ecuaţiilor diferenţiale liniare 197
9.5. Ecuaţii diferenţiale de tip Euler 204
9.6. Ecuaţiile şi sistemele diferenţiale liniare şi teoria distribuţiilor . . . 206

10. Teoria matricelor aplicată la integrarea sistemelor diferenţiale liniare 209

10.1. Noţiuni generale 209
10.2. Valori şi vectori proprii. Forme canonice 211
10.3. Definirea funcţiilor de matrice 213
10.4. Construcţia efectivă a funcţiilor de matrice 218
10.5. Proprietăţile exponenţialei de matrice 222
10.6. Sisteme periodice 227
10.7. Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul al doilea 232

11. Ecuaţii diferenţiale liniare în complex 237

11.1. Puncte regulate şi puncte singulare izolate 237
11.2. Ecuaţii diferenţiale de tip Fuchs 244

12. Funcţia hipergeometrică şi funcţia hipergeometrică degenerată 254

12.1. Ecuaţia lui Gauss şi seria hipergeometrică 254
12.2. Funcţia hipergeometrică degenerată 263
Exerciţii şi completări 264

13. Funcţii Bessel 267

13.1. Funcţii Bessel de speţa I 267
13.2. Funcţii Bessel de speţa II 271
13.3. Funcţii Bessel de speţa III 274
13.4. Alte funcţii Bessel importante 275
13.5. Reprezentări integrale pentru funcţiile Bessel 280
Exerciţii şi completări 285

14. Polinoame ortogonale 288

14.1. Şiruri liniare independente, şiruri ortogonale, şiruri ortonormale . . . 288
14.2. Polinoame ortogonale: proprietăţi generale 291
14.3. Polinoame Legendre 296
14.4. Polinoame Jacobi 302
14.5. Polinoame Gegenbauer. Funcţii Legendre asociate 306
14.6. Polinoame Cebişev 314
14.7. Polinoame Laguerre 316
14.8. Polinoame Hermite 319
Exerciţii şi completări 322

15. Sisteme complete şi sisteme închise în spaţii vectoriale. Aproximări în spaţii prehilbertiene 326

15.1. Sisteme complete în spaţii vectoriale normate 326
15.2. Aproximări în spaţii prehilbertiene. Sisteme ortogonale închise . . . 328
15.3. Completitudinea sistemelor de polinoame ortogonale 333
Exerciţii şi completări 339

16. Elemente din teoria stabilităţii 340

16.1. Noţiuni preliminare 340
16.2. Clasificarea punctelor staţionare în $\mathbb{R}^2$ 343
16.3. Stabilitatea soluţiilor sistemelor diferenţiale 350
Exerciţii şi completări 360

17. Probleme de oscilaţie 362

17.1. Teoreme de oscilaţie 362
17.2. Probleme polilocale 368
17.3. Şiruri ortogonale de funcţii Bessel 371
Exerciţii şi completări 374
Bibliografie 376

Notaţii

$\mathbb{N}$	mulţimea numerelor naturale
$\mathbb{Z}$	mulţimea numerelor întregi
$\mathbb{Z}_+$	mulţimea numerelor întregi nenegative
$\mathbb{Z}_-$	mulţimea numerelor întregi nepozitive
$\mathbb{Q}$	mulţimea numerelor raţionale
$\mathbb{Q}_+$	mulţimea numerelor raţionale nenegative
$\mathbb{Q}_-$	mulţimea numerelor raţionale nepozitive
$\mathbb{R}$	mulţimea numerelor reale
$\mathbb{R}_+$	mulţimea numerelor reale nenegative
$\mathbb{R}_-$	mulţimea numerelor reale nepozitive
$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
$\mathbb{C}$	mulţimea numerelor complexe
$\overline{\mathbb{C}}$	$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$
$]a, b[$	interval deschis din $\mathbb{R}$
$[a, b]$	interval închis din $\mathbb{R}$
$]a, b]$, $[a, b[$	intervale semideschise din $\mathbb{R}$
$\mathbb{R}^n$	spaţiul euclidian n dimensional, $n = 2, 3, \ldots$
deg	gradul unui polinom
grad	gradientul unui cîmp scalar
cis	funcţia definită prin $\operatorname{cis}(x) = \exp(ix)$
$\binom{n}{k}$	numărul natural $\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$
$(x)_k$	produsul finit $x(x+1)(x+2)\ldots(x+k-1)$, $x \in \mathbb{C}$
Γ	funcţia gama, $\Gamma(z) = \int_0^\infty \exp(-t)\, t^{z-1}\, dt$, $\operatorname{Re} z > 0$
B	funcţia beta, $B(p, q) = \dfrac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ $\operatorname{Re} p > 0$, $\operatorname{Re} q > 0$
Re	partea reală a unui număr complex
Im	partea imaginară a unui număr complex
⌜	indică începutul unei demonstraţii
⌟	indică sfîrşitul unei demonstraţii

CAPITOLUL 1

Introducere

1.1. Ecuații diferențiale și modelarea matematică

Teoria ecuațiilor diferențiale apare odată cu descoperirea calculului diferențial și integral; problema primitivei (adică determinarea funcțiilor F derivabile cu proprietatea $F'(x) = f(x)$, $x \in I$, unde I este un interval din $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{C}$ fiind presupusă cunoscută) poate fi considerată cea mai simplă problemă a teoriei ecuațiilor diferențiale.

Teoria ecuațiilor diferențiale constituie unul din principalele instrumente ale cercetării matematice și își datorește dezvoltarea în primul rînd faptului că modelarea matematică a unor fenomene practice se realizează prin intermediul unor astfel de ecuații. La rîndul ei această dezvoltare a condus la obținerea unor progrese însemnate în diverse domenii ale activității, cum ar fi de exemplu fizica, științele tehnice, economia etc.

Teoria ecuațiilor diferențiale permite studiul unor fenomene *deterministe, finite* și *diferențiabile*, înțelegînd prin fenomene deterministe acele procese în care starea viitoare a evoluției este unic determinată prin starea condițiilor prezente, prin fenomene finite acele procese în care apare un număr finit de parametri necesari pentru descrierea corectă a acestuia și prin fenomene diferențiabile, acele procese în care funcțiile utilizate la descrierea lui admit un număr de derivate.

În legătură cu aceste definiții, se obișnuiește să se numească *spațiul fazelor* mulțimea tuturor stărilor unui fenomen dat; de exemplu în cazul studiului deplasării unui corp în spațiu, este cunoscut că această deplasare este unic determinată prin cunoașterea poziției și vitezelor inițiale, adică spațiul fazelor în acest proces va fi constituit din mulțimea pozițiilor și vitezelor acestui corp.

În cele ce urmează se vor prezenta cîteva exemple simple dar caracteristice de modelări matematice cu ajutorul ecuațiilor diferențiale.

1.1.1. Dezintegrarea radioactivă

Dezintegrarea radioactivă este un exemplu de fenomen determinist, finit și diferențiabil, deci care poate fi modelat cu ajutorul teoriei ecuațiilor diferențiale în modul următor.

Din experiență se deduce că viteza de dezintegrare a elementului radium este direct proporțională cu masa de radium luată în considerație ; notînd cu $m = m(t)$ masa la momentul t, viteza de dezintegrare fiind evident egală cu $m'(t)\left(= \frac{dm}{dt}\right)$, va rezulta că legea de variație a masei în cazul de față va fi

$$\frac{dm}{dt} = -km,$$

$k > 0$ fiind un factor de proporționalitate (s-a utilizat semnul minus deoarece prin dezintegrare masa se micșorează). Presupunînd $k \in \mathbb{R}$, ecuația obținută se poate integra ușor ; astfel, prin înmulțire cu $\exp(kt)$ se deduce ușor egalitatea $\frac{d}{dt}[\exp(kt)\, m(t)] = 0$, din care rezultă că produsul $\exp(kt)\, m(t)$ este o constantă. Notînd cu m_0 această constantă, rezultă că legea de variație a masei de radium va fi

$$m(t) = m_0 \exp(-kt),$$

și este evident că m_0 nu este altceva decît masa radiumului la momentul inițial $t = 0$ (valoare care este cunoscută). Rezultă, așadar, că spațiul fazelor este unidimensional iar masa radiumului se poate deduce la orice moment $t > 0$ dacă se cunoaște k; determinarea constantei k se poate face, de exemplu, pe cale experimentală astfel: dacă $p\%$ este procentul din masa inițială dezintegrată în intervalul de timp T, va rezulta

$$\left(1 - \frac{p}{100}\right) m_0 = m_0 \exp(-kT),$$

adică

$$k = -T^{-1} \ln\left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

și cum valorile T și p pot fi măsurate, s-a dedus $k = 436 \cdot 10^{-6}$; prin urmare legea de dezintegrare a masei de radium va fi

$$m(t) = m_0 \exp(-435 \cdot 10^{-6} t).$$

Din această lege se poate deduce, de exemplu, intervalul de timp în care masa inițială m_0 de radium se micșorează cu un sfert : din egalitatea $\frac{3}{4} m_0 = m_0 \exp(-436 \cdot 10^{-6} t_0)$ se deduce

$$t_0 = \frac{10^6 (\ln 4 - \ln 3)}{436} = 795 \text{ ani.}$$

1.1.2. Fenomene de creștere și de descreștere

Situația descrisă la 1.1.1 poate fi întîlnită și în alte probleme teoretice sau practice din fizică, chimie, biologie, economie. Un caz simplu în acest sens este dat de fenomenele de creștere sau de descreștere (de exemplu a producției dacă ne referim la economie, a unei culturi de bacterii dacă ne referim la biologie) cînd vor apărea ecuații diferențiale de forma

$$\frac{df(t)}{dt} = k(t) f(t),$$

unde $k(t) > 0$ în cazul unui fenomen de creștere sau $k(t) < 0$ dacă este vorba de un fenomen de descreștere.

De exemplu, în situația în care se studiază dezvoltarea unei specii de animale, notînd cu $f(t)$ numărul de indivizi la momentul t, cu m și n coeficientul de mortalitate, respectiv de natalitate, deoarece într-un interval de timp avînd măsura T se nasc $nf(T)$ și mor $mf(T)$ indivizi, se deduce ecuația diferențială

$$\frac{df(t)}{dt} = (n-m) f(t),$$

evident analoagă ecuației deduse la 1.1.1.

O observație importantă care trebuie avută în vedere în studii de această natură este aceea că, datorită intervenției factorilor experimentali, legile fenomenelor în cauză nu vor fi stabilite decît cu un

anumit grad de aproximaţie, ceea ce face ca legile care apar să nu fie decît realizări cu un anumit grad de precizie a fenomenelor studiate.

Consideraţiile făcute pînă acum au fost posibile deoarece s-au presupus fenomenele respective reprezentate prin funcţii derivabile; nu întotdeauna însă ipoteza de derivabilitate este justificată. De exemplu, în cazul mişcărilor studiate în teoria şocurilor, funcţiile care apar nu sînt întotdeauna derivabile.

1.1.3. Resortul în spirală cu caracteristică liniară

Să presupunem că o masă m este aşezată pe un resort în spirală (fig. 1.1, a); notînd cu y depărtarea capătului superior al resortului de la poziţia de echilibru (se presupune $y > 0$ dacă resortul se deplasează în jos şi $y < 0$ în caz contrar), cu $\lambda > 0$ şi $k > 0$ factorul de frînare, respectiv factorul de rigiditate a resortului, presupunînd că deplasării masei în cauză i se opun forţe proporţionale cu

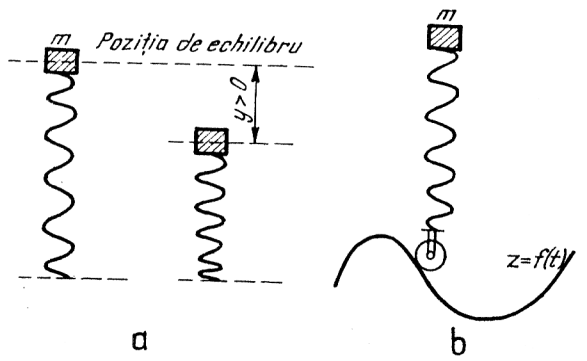

Fig. 1.1.

deplasarea şi cu viteza de deplasare $\left(v = \dot{y} = \frac{dy}{dt}\right)$, în baza legii lui Newton se obţine ecuaţia diferenţială

$$m\ddot{y} = -ky - \lambda \dot{y} \tag{1.1}$$

care va reprezenta ecuaţia *oscilaţiilor libere ale resortului.*

În ipoteza suplimentară că extremitatea inferioară a resortului efectuează o deplasare în planul vertical tOz (cum ar fi de exemplu

cazul amortizoarelor spirale ale unui automobil) (fig. 1.1, b), dacă această deplasare se poate descrie prin legea $z = f(t)$, atunci pentru obţinerea noii ecuaţii de mişcare trebuie înlocuit în membrul drept al ecuaţiei (1.1) y prin $y + f$; se va obţine ecuaţia diferenţială

$$m\ddot{y} = -k(y+f) - \lambda(y+f)' \text{ sau } m\ddot{y} + \lambda \dot{y} + ky = -kf - \lambda \dot{f}.$$

Această ultimă ecuaţie diferenţială poartă denumirea de *ecuaţia oscilaţiilor forţate ale resortului*; evident, aici spaţiul fazelor este bidimensional (deplasările resortului sînt unic determinate dacă sînt cunoscute poziţiile şi vitezele acestuia).

1.1.4. Dinamica punctului material

Dacă M este un punct material de masă m care se deplasează în spaţiul $\mathbb{R}^3$ sub acţiunea unei forţe $\mathbf{F}$ (care de obicei depinde de timp, de poziţia punctului M şi de viteza de deplasare a punctului), în baza legii fundamentale a dinamicii (legea lui Newton) se obţine egalitatea

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}\left(t, \mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) \tag{1.2}$$

dacă $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ este vectorul de poziţie al punctului M. De fapt, în ecuaţia (1.2) sînt incluse trei ecuaţii diferenţiale, care se obţin prin proiecţia ecuaţiei vectoriale (1.2) pe axele de coordonate:

$$\left.\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= X\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= Y\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= Z\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

dacă $\mathbf{F} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$. Este evident că sistemul (1.3) reprezintă transcrierea scalară a ecuaţiei vectoriale (1.2), cele două scrieri fiind echivalente; ecuaţia vectorială (1.2) este o ecuaţie diferenţială de

ordinul al doilea iar sistemul (1.3) este format din trei ecuații diferențiale de ordinul al doilea. Spațiul fazelor va avea șase dimensiuni.

1.1.5. Ecuația lui Duffing (ecuația pendulului)

Un punct material avînd masa m se deplasează (fără a întîmpina rezistență din partea mediului) pe un cerc situat într-un plan vertical, cercul avînd centrul în punctul O și raza R. La momentul inițial ($t = 0$) punctul se află în A (fig. 1.2) iar într-un punct oarecare P al cercului acționează o forță a cărei componentă tangențială se presupune egală cu $k \sin t$ (k fiind o constantă). Luînd centrul cercului ca origine a sistemului de coordonate polare, notînd prin $\theta = \theta(t)$ unghiul dintre razele OA și OP, cu s arcul de cerc AP, va rezulta ecuația de mișcare

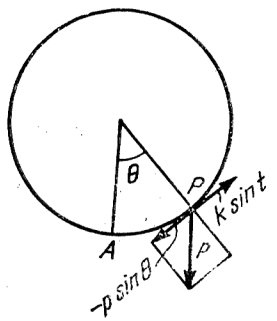

Fig. 1.2.

$$m\ddot{s} + p\sin\theta = k \sin t, \qquad p = mg,$$

(g fiind ca de obicei accelerația gravitațională). Deoarece $s = R\,\theta$, notînd $a^2 = \frac{g}{R}$, $b = \frac{k}{mR}$, se obține *ecuația lui Duffing*

$$\ddot{\theta} + a^2 \sin\theta = b \sin t$$

(în ipoteza că mediul opune o rezistență mișcării, proporțională cu viteza de deplasare, în locul ecuației anterioare se va obține o ecuație puțin modificată $\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + a^2 \sin\theta = b \sin t$).

Un fapt important care apare odată cu studiul acestei ecuații este acela că practic nu ne interesează orice fel de soluție a ecuației lui Duffing ci numai acele soluții care sînt funcții periodice cu perioada 2π, datorită faptului că punctul material în cauză descrie frontiera cercului.

1.1.6. Problema celei de a doua viteze cosmice

Această problemă constă în determinarea vitezei v_0 de lansare pe verticală a unui corp, astfel încît acesta să scape de sub influența atracției terestre.

Utilizînd legea atracției universale și legea lui Newton, dacă masa Pămîntului este M iar masa corpului lansat este m, ecuația de mișcare va fi

$$m\ddot{r}(t) = -k\frac{mM}{r^2(t)},$$

deoarece forța de atracție dintre cele două corpuri este egală cu $k\frac{mM}{r^2}$, notînd prin r distanța de la centrul Pămîntului la centrul de greutate al corpului și prin $k = 6{,}685 \cdot 10^{-8}$ cm^3/(g·s^2) constanta atracției universale, semnul minus datorîndu-se faptului că în cazul de față accelerația este negativă; s-a obținut deci ecuația

$$\ddot{r} = -kMr^{-2} \tag{1.4}$$

ale cărei soluții se pot obține ușor dacă avem în vedere faptul că ne interesează viteza de deplasare. Deoarece $v = \frac{dr}{dt}$, avem

$$\ddot{r} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = v\frac{dv}{dr} = \frac{1}{2}\frac{d}{dr}(v^2),$$

ceea ce arată că în locul ecuației (1.4) se poate utiliza ecuația $\frac{d(v^2)}{dr} = -2kMr^{-2}$, ale cărei soluții vor fi evident funcțiile $v^2(t) = 2kMr^{-1} + a$, unde a este o constantă care se va determina din condiția $v(0) = v_0$; cum pentru $t = 0$ avem $r = R$ (raza Pămîntului, deci $R = 6{,}37 \cdot 10^8$ cm), se obține egalitatea

$$v^2 = \frac{2kM}{r} + \left(v_0^2 - \frac{2\,kM}{R}\right).$$

Cum trebuie să avem permanent $v > 0$, deoarece termenul $\frac{2\,kM}{r}$ devine mic pentru r mare, este obligatorie verificarea inegalității

$$v_0^2 \geqslant \frac{2kM}{R},$$

de unde se deduce, după efectuarea tuturor calculelor, $v_0 \geqslant 11{,}2$ km/s (cu valoarea $M = 5{,}97 \cdot 10^{27}$ g); așadar, cea de-a doua viteză cosmică nu trebuie să fie inferioară valorii 11,2 km/s.

1.1.7. Ecuația Thomas-Fermi și ecuația lui Polvani

Vom încheia prezentarea ecuațiilor diferențiale celor mai simple care apar în activitatea practică cu două ecuații care apar în fizica teoretică. Astfel, ecuația diferențială

$$x^{\frac{1}{2}} y'' = y^{\frac{3}{2}}$$

este denumită *ecuația Thomas-Fermi* și a apărut în probleme legate de distribuția electronilor într-un atom greu; funcția y trebuie astfel determinată încît să fie verificate condițiile

$$y(0) = 1, \quad \lim_{x \to \infty} y(x) = 0.$$

În cazul studierii mișcării electronului într-o diodă cilindrică situată într-un cîmp magnetic, Polvani a dedus că raza vectoare r a electronului ca funcție de t verifică o ecuație diferențială de forma

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{\lambda^2 t}{2r} - \frac{r}{2} + \frac{1}{2r^3},$$

$\lambda > 0$ fiind un parametru.

1.2. Definiții. Generalități

O *ecuație diferențială* pentru funcția $y = y(x)$, definită și derivabilă de m ori pe mulțimea $A \subset \mathbb{R}$ (unde A este sau un interval I sau o reuniune de intervale), este o relație de forma

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(k)}, \ldots) = 0, \quad k \leqslant m, \tag{1.5}$$

unde F este o funcție cunoscută de variabilele $x, y, y', \ldots, y^{(k)}, \ldots$ astfel încît pot apărea doar un număr finit de derivate ale lui y

(se presupune evident $k \geqslant 1$); dacă $n \leqslant m$ este ordinul maxim de derivare a funcției y, astfel încît $y^{(n)}$ apare efectiv în F, atunci se spune că ecuația (1.5) este o *ecuație diferențială de ordinul n*.

Funcția $y : A \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) de clasă $C^n(A)$ este o soluție în $A_1 \subset A$ a ecuației (1.5), dacă $y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x), \ldots$ înlocuiți în F sînt astfel încît $F[x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(k)}(x), \ldots]$ este zero pentru orice $x \in A_1$

De exemplu, pentru ecuația diferențială $y' = -ky$, dedusă la 1.1.1, funcția $y(x) = c \exp(-kx)$, cu c o constantă oarecare, va fi o soluție în $A = \mathbb{R}$ a ecuației considerate, deoarece $y'(x)$ va fi egal cu $-ky(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$; pentru ecuația $xy' + 2y = 0$ funcția $y(x) = cx^{-2}$, cu c o constantă oarecare, va fi o soluție separat pentru $x < 0$ și pentru $x > 0$ (aici deci $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$).

Presupunînd $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_p)$, deci $\mathbf{y}' = (y_1', \ldots, y_p')$, $\ldots$, $\mathbf{y}^{(k)} = (y_1^{(k)}, \ldots, y_p^{(k)})$, $1 \leqslant k \leqslant m$, unde $y_1, \ldots, y_p$, $p \geqslant 2$, sînt funcții de m ori derivabile în A, atunci relațiile

$$\begin{aligned} &F_1(x, y_1, \ldots, y_p, y_1', \ldots, y_p', \ldots, y_1^{(k)}, \ldots, y_p^{(k)}, \ldots) = 0, \\ &\qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ &F_q(x, y_1, \ldots, y_p, y_1', \ldots, y_p', \ldots, y_1^{(k)}, \ldots, y_p^{(k)}, \ldots) = 0 \end{aligned} \tag{1.6}$$

definesc un sistem format din $q \geqslant 2$ ecuații diferențiale în funcțiile necunoscute $y_1, \ldots, y_p$. Notînd $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_q)$, sistemul (1.6) se poate scrie vectorial sub forma

$$\mathbf{F}(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \ldots, \mathbf{y}^{(k)}, \ldots) = 0. \tag{1.6'}$$

În mod obișnuit se presupune $p = q$ dar sînt posibile atît situația $p < q$ [cînd se spune că sistemul (1.6) este supraabundent] cît și situația $p > q$ [cînd sistemul (1.6) este subabundent].

Ordinul maxim de derivare care apare în sistemul (1.6) determină ordinul acestui sistem iar noțiunea de soluție a unui sistem diferențial se definește în mod corespunzător, luînd în considerație funcțiile $(y_1, \ldots, y_p)$.

Exemplele prezentate în 1.1 arată că de obicei nu interesează orice soluție a unei ecuații diferențiale date, ci numai anumite soluții, care verifică anumite condiții suplimentare bine precizate; astfel, în cazul sistemului de ecuații (1.3), trebuie determinată acea soluție $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ care verifică următoarele șase condiții (așa-numitele condiții inițiale):

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= x_0, \quad y(t) = y_0, \quad z(t) = z_0 \\ x'(t) &= x_1, \quad y'(t) = y_1, \quad z'(t) = z_1 \end{aligned}\right\} \text{pentru } t = t_0,$$

unde t_0 (valoarea inițială pentru t sau momentul inițial), x_0, y_0, z_0 (poziția inițială) și x_1, y_1, z_1 (vitezele inițiale) sînt numere reale cunoscute (se obișnuiește să se considere $t_0 = 0$).

În cazul ecuației Thomas-Fermi de la 1.1.7 apar însă altfel de condiții suplimentare: soluția trebuie să admită valori prescrise pentru $x = 0$ și $x = \infty$, ceea ce constituie o problemă bilocală pentru ecuația în discuție iar în cazul ecuației lui Duffing soluția trebuie să fie o funcție periodică.

Aceste probleme care apar în mod natural în teoria ecuațiilor diferențiale vor fi tratate în viitor, scopul principal al acestui tratat fiind acela de a prezenta și rezolva problemele de bază ale teoriei ecuațiilor diferențiale.

În mulțimea ecuațiilor diferențiale un rol deosebit îl joacă ecuațiile diferențiale liniare și sistemele diferențiale liniare.

Prin definiție, ecuația diferențială (1.5) este o ecuație liniară, dacă funcția F care apare în ecuația (1.5) este liniară în variabilele y, y', ... $\ldots, y^{(k)}, \ldots$, adică are forma

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(k)}, \ldots) = -f(x) + a_0(x)y + a_1(x)y' + \ldots + a_k(x)y^{(k)} + \ldots,$$

funcțiile a_j, $j = 0, 1, \ldots$, fiind în număr finit. Cu alte cuvinte, o ecuație diferențială liniară de ordinul n va avea forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

sau, pe scurt,

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(x)y^{(j)} = f(x) \tag{1.7}$$

în ipoteza că funcția a_n nu este nulă pe mulțimea A.

Se presupune că funcțiile $a_j = a_j(x)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, care se numesc *coeficienții ecuației* (1.7) precum și funcția $f = f(x)$, care se numește *termenul liber* (sau *factorul perturbator*) al ecuației liniare în discuție, sînt funcții definite pe mulțimea A, avînd valori reale (sau complexe).

Dacă termenul liber f nu este nul pe A, atunci se spune că ecuația (1.7) este *neomogenă* iar în caz contrar (deci dacă f este nul pe A) ecuația (1.7) se va numi *omogenă*; dacă toți coeficienții ecuației (1.7) sînt numere reale (respectiv numere complexe), atunci ecuația (1.7) va fi o *ecuație diferențială liniară și cu coeficienți constanți.*

Notînd prin D operatorul de derivare, deci $D = \frac{d}{dx}$ și utilizînd notațiile

$$D^0 = 1, \; D^k = \frac{d^k}{dx^k},$$

adică

$$D^0 g(x) = g(x), \; D^k g(x) = g^k(x),$$

se va putea scrie în locul sumei $\sum_{j=0}^{n} a_j(x)y^{(k)}$ care apare în ecuația (1.7) suma $\sum_{j=0}^{n} a_j(x)\, D^j y$ iar ecuația (1.7) se va putea transcrie și sub forma echivalentă

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(x)\, D^j y = f(x) \tag{1.7'}$$

care pune în evidență posibilitatea utilizării operatorului liniar L definit prin

$$L = L(x, D) = \sum_{j=0}^{n} a_j D^j$$

și deci ecuația diferențială (1.7) se va putea scrie, simbolic, și sub forma

$$L(x, D)y = f(x).$$

Aplicația $L = L(x, D)$, în ipoteza că funcțiile a_j, $j = 0, \ldots, n$, sînt continue pe mulțimea lor de definiție, va fi liniară (deoarece $L(y+z) = Ly + Lz$ și $L(ay) = a\,Ly$ (a fiind număr real sau complex) și va transforma mulțimea funcțiilor de clasă $C^s(A)$, $s \geqslant n$, în mulțimea funcțiilor continue pe A.

În mod analog se definesc sistemele diferențiale liniare; acestea vor avea forma

$$\sum_{k=1}^{p} \sum_{l=0}^{n} a_{jkl}(x)\, y_k^{(l)} = f_j(x), \; j = 1, \ldots, q,$$

dacă ordinul sistemului este inferior lui n iar numărul funcţiilor necunoscute este egal cu p (numărul ecuaţiilor fiind q).

În încheiere, vom menţiona că noţiunea de soluţie pentru cuaţiile (sistemele) diferenţiale definită anterior este susceptibilă de anumite generalizări ; astfel, în cazul ecuaţiilor liniare, dacă se presupun coeficienţii a_j funcţii indefinit derivabile , y se poate considera distribuţie ($y \in D'(\mathbb{R})$) ; în cadrul acestei cărţi însă nu se va utiliza decît rareori această ipoteză, adică se vor lua în consideraţie doar soluţiile obişnuite (clasice).

CAPITOLUL 2

Ecuaţii diferenţiale scalare de ordinul întîi

2.1. Noţiuni generale

Ecuaţia diferenţială scalară de ordinul întîi are forma generală

$$F[x, y(x), y'(x)] = 0, \tag{2.1}$$

unde $F : J \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; presupunînd $\dfrac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$, ecuaţia (2.1) se poate explicita în raport cu y' şi de aceea în locul acestei ecuaţii se pot considera ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi de forma

$$y' = f(x, y), \tag{2.2}$$

unde $f : D_2 \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă ; evident, ecuaţiei (2.1) îi pot corespunde mai multe ecuaţii diferenţiale de forma (2.2) (de exemplu, ecuaţiei diferenţiale $y'^2 - 2xy' + x^2 - y^2 = 0$, prin rezolvare în raport cu y' îi vor corespunde două ecuaţii diferenţiale de forma (2.2) şi anume $y' = x+y$ şi $z' = x-z$) dar în continuare se vor lua în consideraţie numai ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi avînd forma

(2.2), pe care o vom numi *formă normală* a ecuațiilor diferențiale (scalare) de ordinul întîi [este evident că odată realizat studiul ecuațiilor diferențiale de forma (2.2), studiul ecuațiilor diferențiale generale (2.1) comportă studiul unui număr oarecare de ecuații diferențiale scrise sub formă normală].

Fie J un interval oarecare al axei reale (deschis, închis, semideschis, mărginit sau nu); funcția $\varphi : J \to \mathbb{R}$ se spune că este o *soluție (ordinară, clasică)* a ecuației diferențiale (2.2) definită pe intervalul J, dacă φ este derivabilă în intervalul J iar punctul $(x, \varphi(x))$ aparține domeniului D_2 (în care s-a definit f) iar pentru orice $x \in J$ avem

$$\varphi'(x) = f[x, \varphi(x)].$$

În viitor, prin integrarea ecuației (2.2) se va înțelege problema determinării soluțiilor acestei ecuații diferențiale.

Prin *problema Cauchy* (sau *problemă cu condiție inițială*) atașată ecuației (2.2) se înțelege determinarea acelei soluții a acestei ecuații care verifică în plus condiția suplimentară

$$\varphi(x_0) = x_0, \; x_0 \in J, \; y_0 \in \mathbb{R}, \; (x_0, y_0) \in D_2. \tag{2.3}$$

Dacă φ este o soluție pentru ecuația (2.2), atunci graficul funcției φ, notat G_φ ($G_\varphi = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in J\}$ este o submulțime din D_2; această submulțime este evident o curbă, care uneori este denumită și *curbă integrală* a ecuației (2.2) sau chiar *traiectorie* a ecuației (2.2).

Noțiunile introduse pînă acum au o interpretare geometrică simplă: dacă $(x_0, y_0) \in D_2$ și $\varphi(x_0) = y_0$, atunci curba integrală G_φ trece prin punctul (x_0, y_0) iar în acest punct este cunoscută și derivata lui φ: $\varphi'(x_0) = f(x_0, y_0)$; prin urmare, ecuația diferențială (2.2) definește în orice punct (x_0, y_0) din D_2 o direcție unică al cărei unghi α_0 cu sensul pozitiv al axei Ox este definit prin $\operatorname{tg} \alpha_0 = f(x_0, y_0)$. Notînd $p = \operatorname{tg} \alpha$, atunci tripletul (x, y, p), (x, y) fixați în D_2, $p = f(x, y)$, se numește element *de linie* definit prin ecuația diferențială (2.2) iar dacă punctul (x, y) parcurge domeniul D_2, mulțimea $\{(x, y, f(x, y))\}$ se spune că formează un *cîmp de direcții* definit prin ecuația (2.2). Din punct de vedere geometric, orice soluție φ a ecuației diferențiale (2.2) are proprietatea că în orice punct al curbei integrale corespunzătoare acestei soluții, cîmpurile de direcții $(x, \varphi(x), \varphi'(x))$ și $(x, y, f(x, y))$ coincid [cu alte cuvinte, integrarea ecuației diferențiale (2.2) constă în a găsi acele curbe din D_2 a căror tangentă în fiecare punct coincide cu direcția cîmpului, determinat de ecuația (2.2), în acel punct].

Prin *izoclină* a ecuației diferențiale (2.2) se înțelege curba din D_2 care are ecuația carteziană (sub formă implicită) $f(x, y) = k$, $k \in \mathbb{R}$; este evident că dacă φ este o soluție a ecuației diferențiale (2.2), atunci $\varphi'(x) = f[x, \varphi(x)]$. Deci orice soluție a ecuației în studiu intersectează o izoclină dată mereu sub același unghi; dacă parametrul k variază, se obține familia de izocline atașate ecuației (2.2), care poate servi la determinarea grafică **a soluțiilor** ecuației diferențiale date.

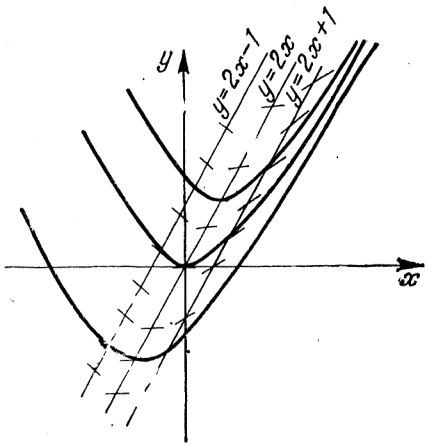

Fig 2.1. Izoclinele și traiectoriile ecuației $y = 2x - y$

Ecuația diferențială (2.2) se poate scrie sub o formă simetrică echivalentă și anume

$$g(x, y)\,dx + h(x, y)\,dy = 0, \tag{2.4}$$

unde $g, h : D_2 \to \mathbb{R}$ sînt funcții continue iar prin soluție a acestei ecuații diferențiale se înțelege perechea $\{x(t), y(t)\}$, iar $x, y : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ sînt funcții de clasă C^1, astfel încît $x'^2(t) + y'^2(t) > 0$ și

$$g[x(t), y(t)]x'(t) + h[x(t), y(t)]y'(t) = 0 \text{ pentru } t \in [t_1, t_2]. \tag{2.4'}$$

Vom conveni să scriem ecuația (2.4'), deci și ecuația (2.4) sub forma

$$g(x, y)x' + h(x, y)y' = 0; \tag{2.5}$$

curbele integrale ale ecuației (2.5) vor fi deci reprezentate parametric, spre deosebire de curbele integrale ale ecuației (2.2), care au fost presupuse scrise în coordonate carteziene: $y = \varphi(x)$, $x \in J$.

Echivalența dintre ecuațiile (2.5) și (2.2) se poate stabili astfel: în locul ecuației (2.2), cu același grad de generalitate, se poate considera ecuația

$$g(x, y) + h(x, y)y' = 0 \tag{2.2'}$$

și dacă se scrie pentru curba integrală $y = y(x)$, $x \in J$, reprezentarea parametrică $x = t$, $y = y(t)$ se va obține evident forma (2.5), deoarece $x' = 1$. Reciproc, dacă $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ verifică ecuația (2.5), cum $\varphi'^2 + \psi'^2 > 0$, va exista $t_0 \in]t_1, t_2[$ astfel încît, de exemplu, $\varphi'(t_0) \neq 0$ iar în baza continuității lui φ', avem $\varphi'(t) \neq 0$ dacă $t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$; în baza teoremei funcțiilor implicite, există funcția $t = t(x)$ astfel încît $t(x_0) = t_0$, $\varphi[t(x)] = x$ în vecinătatea lui x_0 iar t va fi de clasă C^1 în această vecinătate. Punînd $y = y(x) = \psi[t(x)]$, deoarece $y' = \psi'(t) \cdot t'(x)$, din (2.5) rezultă $g \cdot t' + h\,\psi'(t) \cdot t' = 0$, adică se obține o ecuație diferențială de forma $g + hy' = 0$.

Forma simetrică (2.4) este avantajoasă deoarece nu pretinde ca soluțiile ei să fie scrise neapărat sub forma $y = \varphi(x)$ [cum se întîmplă în cazul ecuației (2.2)] ci pot fi scrise de exemplu și sub forma $x = \psi(y)$ sau sub forma parametrică.

2.2. Ecuații exacte

Vom spune că ecuația diferențială (2.4) sau (2.5) este o *ecuație exactă* în D_2 dacă există $F : D_2 \to \mathbb{R}$, $F \in C^1(D_2)$ astfel încît să se verifice condițiile

$$F_x(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = g(x, y),\ F_y(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = h(x, y) \tag{2.6}$$

dacă $(x, y) \in D_2$. În această situație funcția F se numește *primitivă* pentru expresia $g\,dx + h\,dy$ și deoarece $dF = F_x\,dx + F_y\,dy = g\,dx + h\,dy$, rezultă că dacă $x = x(t)$, $y = y(t)$ este o soluție a ecuației (2.5), atunci $dF[x(t), y(t)] = 0$ și deci $F(x, y) = \text{const}$ dacă se înlocuiește x și y printr-o soluție oarecare a ecuației (2.5). Astfel, dacă ecuația (2.4) este exactă în D_2 și dacă F este o primitivă pentru expresia $g\,dx + h\,dy$, atunci soluțiile ecuației (2.4) se obțin din egalitatea $F(x, y) = C$, prin rezolvare fie în raport cu x, fie în raport cu y sau prin parametrizare. Dacă trebuie rezolvată o problemă Cauchy

$y(x_0) = y_0$ pentru ecuația (2.4), atunci se poate determina mai întîi valoarea constantei C [avem $C = F(x_0, y_0)$] iar apoi se realizează explicitarea dorită. Se mai spune că F este o *integrală primă* pentru ecuația (2.4).

Exemple

1. Ecuația $[y^2 \exp(xy) + 2xy]dx + [\exp(xy)(1 + y^2) + x^2]\,dy = 0$ este exactă în $\mathbb{R}^2$ iar primitiva corespunzătoare este $F(x, y) = yx^2 + \exp(xy)$.

2. Ecuația $y \cos x\,dx + (\sin x + 2)\,dy = 0$ este exactă în $\mathbb{R}^2$, primitiva fiind $F(x, y) = y(\sin x + 2)$.

În acest caz, dacă se solicită soluția problemei Cauchy $y = \frac{1}{2}$ pentru $x = 0$, avem $F\left(0, \frac{1}{2}\right) = 1$ și, explicitînd y din egalitatea $y(\sin x + 2) = 1$, se obține $y = \frac{1}{2 + \sin x}$.

Problema determinării ecuațiilor exacte din mulțimea ecuațiilor (2.4) se poate rezolva imediat dacă $g, h \in C^1(D_2)$; în această situație, ecuația (2.4) este exactă în D_2 dacă în acest domeniu avem

$$h_x = g_y, \text{ adică } \frac{\partial h(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial g(x, y)}{\partial y},\ \forall (x, y) \in D_2, \tag{2.7}$$

iar primitiva va fi

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} g(t, y)\,dt + \int_{y_0}^{y} h(x_0, t)\,dt,\ (x_0, y_0) \in D_2,\ (x, y) \in D_2, \tag{2.8}$$

sau

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} g(t, y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} h(x, t)\,dt,$$

unde punctul (x, y) este suficient de apropiat de punctul (x_0, y_0), astfel încît linia frîntă cu extremitățile în punctele (x_0, y_0), (x, y_0) și (x, y) să fie inclusă în D_2. Într-adevăr, din (2.8), utilizînd (2.7), rezultă

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = g(x, y),\ \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial g(t, y)}{\partial y}\,dt + h(x_0, y) =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial h(t, y)}{\partial t}\,dt + h(x_0, y) = h(t, y)\Big|_{t = x_0}^{t = x} + h(x_0, y) = h(x, y).$$

2.3. Factor integrant (sau multiplicatorul lui Euler)

Este ușor de constatat că, în general, ecuațiile de forma (2.4) nu sînt exacte; de exemplu, ecuația $2y\mathrm{d}x + 3x\mathrm{d}y = 0$ nu este exactă în nici un subdomeniu din $\mathbb{R}^2$: avem $g(x, y) = 2y$, $h(x, y) = 3x$, $g, h \in C^1(\mathbb{R}^2)$ dar $\frac{\partial g}{\partial y} = 2$, $\frac{\partial h}{\partial x} = 3$. Se observă însă că dacă se consideră domenii din $\mathbb{R}^2$ pentru care $x \neq 0$, înmulțind ecuația în cauză cu $x^{-1/3}$, se va obține o ecuație exactă $2x^{-1/3}y\mathrm{d}x + 3x^{2/3}\mathrm{d}y = 0$ [deoarece $g(x, y) = 2x^{-1/3}y$, $h(x, y) = 3x^{2/3}$ iar $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x} = 2x^{-1/3}$] a cărei primitivă va fi evident $F(x, y) = 3x^{2/3}y$.

Generalizînd situația descrisă anterior, dacă ecuația (2.4), în care $g, h \in C^0(D_2)$, are proprietatea că există $\mu : D_2 \to \mathbb{R}_2$, $\mu \in C^0(D_2)$, $\mu \neq 0$, astfel încît ecuația diferențială

$$(\mu g)(x, y)\mathrm{d}x + (\mu h)(x, y)\mathrm{d}y = 0 \qquad (2.4')$$

(obținută deci prin înmulțirea ei cu μ) este exactă, atunci funcția μ se numește *factor integrant* sau *multiplicator Euler* pentru ecuația (2.4). Dacă s-a determinat un factor integrant pentru ecuația (2.4), avînd în vedere echivalența dintre ecuațiile (2.4) și (2.4'), orice soluție a ecuației (2.4) se obține cu ajutorul primitivei F atașate ecuației (2.4'). În cazul precedent, evident factorul integrant a fost $\mu(x, y) = x^{-1/3}$.

Problema determinării unui factor integrant pentru o ecuație diferențială dată nu este simplă; există însă situații care conduc ușor la obținerea acestuia. Astfel, dacă se presupune g, h, $\mu \in C^1(D_2)$, atunci condiția (2.7) va conduce la egalitatea $(\mu g)_y = (\mu h)_x$ sau, ceea ce este același lucru, la ecuația

$$h\frac{\partial \mu}{\partial x} - g\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x}\right), \qquad (2.9)$$

numită *ecuația cu derivate parțiale a factorului integrant*; ecuația (2.9) trebuie verificată în fiecare punct din D_2 de către multiplicatorul μ. Deoarece integrarea ecuației (2.9) (care ar conduce astfel la determinarea factorului integrant) este o problemă în esență echivalentă cu integrarea ecuației (2.4), nu se poate pune problema găsirii funcției μ, cea mai generală posibilă care să verifice (2.9). De fapt, este suficientă o singură soluție a ecuației (2.9) și de obicei se caută μ de forme particulare; astfel, ecuația (2.4) va admite un factor integrant care depinde numai de variabila x [deci $\mu = \mu(x)$] dacă raportul $\frac{-h_x + g_y}{h}$ va depinde numai de x și atunci $\frac{\mu'}{\mu} = (\ln\mu)' = \frac{g_y - h_x}{h}$, deci $\mu = \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{g_y - h_x}{h}\,\mathrm{d}x\right)$, iar dacă raportul $\frac{h_x - g_y}{g}$ depinde numai de variabila y, atunci ecuația diferențială în studiu va admite un factor integrant de forma $\mu = \mu(y)$, soluție a ecuației

$$(\ln\mu)' = \frac{h_x - g_y}{g}, \text{ deci } \mu = \exp\left(\int_{y_0}^{y} \frac{h_x - g_y}{g}\,\mathrm{d}y\right).$$

Exemple

3. Ecuația diferențială $(3x^2 + y)\mathrm{d}x + x(1 + 2x^2y + 2y^2)\mathrm{d}y = 0$ în care $g(x, y) = 3x^2 + y$, $h(x, y) = x + 2x^3y + 2xy^2$ [deci $g, h \in C^1(\mathbb{R}^2)$] nu este exactă: $h_x(x, y) = 1 + 6x^2y + 2y^2$ iar $g_y(x, y) = 1$ dar raportul $\frac{h_x - g_y}{g}$ fiind egal cu $2y$, rezultă că va admite un factor integrant funcție de y, care se deduce din egalitatea $\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = 2y$, adică $\mu(y) = \exp(y^2)$. Pentru a obține primitiva F, din egalitățile

$$F_x(x, y) = (3x^2 + y)\exp(y^2),\quad F_y(x, y) = x(1 + 2x^2y + 2y^2)\exp(y^2)$$

integrînd prima egalitate în raport cu x (deci presupunînd y fixat) avem $F(x, y) = (x^3 + xy)\exp(y^2) + \psi(y)$, $\psi(y)$ fiind constanta de integrare care se obține prin utilizarea celeilalte egalități; se găsește $\psi'(y) = 0$, adică $F(x, y) = x(x^2 + y)\exp(y^2)$.

4. În cazul ecuației diferențiale $(x^2\sqrt{x^2+1} + y^2)x' + (2xy\ln x)y' = 0$, în care $g(x, y) = x^2\sqrt{x^2+1} + y^2$, $h(x, y) = 2xy\ln x$, rezultă $\frac{g_y - h_x}{g} = -\frac{1}{x}$, deci va exista un factor integrant funcție de x, care se determină din egalitatea $[\ln\mu(x)]' = -\frac{1}{x}$, deci $\mu(x) = \frac{1}{x}$; așadar, ecuația $\left(x\sqrt{x^2+1} + \frac{y^2}{x}\right)x' + (2y\ln x)y' = 0$ este exactă, primitiva F putîndu-se determina fie cu ajutorul egalităților (2.8), fie direct, din sistemul de egalități

$$F_x(x, y) = x\sqrt{x^2+1} + \frac{y^2}{x},\quad F_y(x, y) = 2y\ln x.$$

Integrînd a doua egalitate, rezultă $F(x, y) = y^2\ln x + \psi(x)$ (ψ fiind o funcție arbitrară de integrare) și, utilizînd prima egalitate, se obține $\psi'(x) = x\sqrt{x^2+1}$, adică $\psi(x) =$

$= \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}$ iar primitiva va fi $F(x, y) = y^2 \ln x + \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}$. Dacă ecuației i se impune și problema Cauchy $y(1) = 0$, rezultă că din egalitatea $F(x, y) = C$ trebuie determinat C astfel încît $F(1, 0) = C$; deci $C = \frac{1}{3}$ și soluția căutată este

$$y^2 \ln x + \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} = \frac{1}{3} \text{ sau } y = \frac{1}{3 \ln x}[1 - (x^2+1)^{3/2}]^{1/2}, \quad x > 0.$$

5. Să se integreze ecuația diferențială $(2x^3 - 6xy)\mathrm{d}x + (3x^2 - y)\mathrm{d}y = 0$, știind că admite un factor integrant de forma $\mu(x, y) = \mu(x^2 + y)$. Aici $g(x, y) = 2x^3 - 6xy$, $h(x, y) = 3x^2 - y$; utilizînd ecuația (2.9) a factorului integrant și notînd $t = x^2 + y$, se obține ecuația $(\ln \mu)' = -\frac{3}{t}$, deci $\mu(x^2 + y) = (x^2 + y)^{-3}$. Aplicînd procedeele din exemplele anterioare, va rezulta imediat primitiva $F(x, y) = (x^2 - y)(x^2 + y)^{-2}$.

2.4. Utilizarea factorului integrant în integrarea ecuațiilor diferențiale de ordinul întîi

2.4.1. Ecuațiile cu variabile separate

Acestea sînt ecuațiile diferențiale de ordinul întîi de forma

$$a(x)\,\mathrm{d}x + b(y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{2.10}$$

în care a și b sînt funcții continue : $a: J_1 \to \mathbb{R}$, $b: J_2 \to \mathbb{R}$. Ecuațiile (2.10) sînt evident ecuații exacte, deoarece $g(x, y) = a(x)$, $h(x, y) = b(y)$ iar $g_y = h_x = 0$ și deci primitiva va fi

$$F(x, y) = \int_{x_1}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t + \int_{y_1}^{y} b(t)\,\mathrm{d}t,$$

iar orice problemă Cauchy (x_0, y_0), $x_0 \in J_1$, $y_0 \in J_2$ se determină scriind $F(x, y) = C$, $C = F(x_0, y_0)$.

2.4.2. Ecuații cu variabile separabile

Acestea sînt ecuațiile diferențiale de ordinul întîi de forma $a_1(x)b_1(y)\mathrm{d}x + a_2(x)b_2(y)\mathrm{d}y = 0$, $a_1, a_2 : J_1 \to \mathbb{R}$, $b_1, b_2 : J_2 \to \mathbb{R}$, (2.11)

a_1, a_2, b_1, b_2 fiind funcții continue; aceste ecuații nu sînt exacte, dar posedă un factor integrant evident : dacă $b_1(y) \neq 0$, $y \in J_2$, $a_2(x) \neq 0$, $x \in J_1$, atunci acest factor integrant va fi $\mu(x, y) = \frac{1}{a_2(x)\,b_1(y)}$, deoarece înmulțind ecuația (2.11) cu acest μ, rezultă o ecuație cu variabile separate, deci de forma (2.10), în care $a = \frac{a_1}{a_2}$, $b = \frac{b_2}{b_1}$. Așadar, pentru ecuația (2.11) soluția oricărei probleme Cauchy (sau a oricărei alte probleme impuse acestei ecuații) se obține prin determinarea convenabilă a constantei C din egalitatea $F(x, y) = C$, cu

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} \left(\frac{a_1}{a_2}\right)(t)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} \left(\frac{b_2}{b_1}\right)(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dacă $b_1(y_1) = 0$, $y_1 \in J_2$, (sau $a_2(x_1) = 0$, $x_1 \in J_1$), atunci $y = y_1$ (respectiv $x = x_1$) este soluție pentru ecuația (2.11), deoarece $a_1(x)b_1(y_1)\mathrm{d}x + a_2(x)b_2(y_1)\mathrm{d}y_1 = 0$ (respectiv $a_1(x_1)\,b_1(y)\,\mathrm{d}x_1 + a_2(x_1)b_2(y)\mathrm{d}y = 0$).

2.4.3. Ecuațiile liniare de ordinul întîi

Acestea au forma

$$a(x)y' + b(x)y = c(x), \quad a, b, c: J \to \mathbb{R}, \quad a, b, c \in C^0(J), \; a \neq 0. \tag{2.12}$$

Scriind aceste ecuații sub forma simetrică

$$[b(x)y - c(x)]\mathrm{d}x + a(x)\mathrm{d}y = 0, \tag{2.12'}$$

se poate determina un factor integrant funcție numai de variabila x; acest factor integrant este

$$\mu(x) = \frac{1}{a(x)} \exp\left[\int_{x_0}^{x} \left(\frac{b}{a}\right)(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

iar primitiva corespunzătoare va fi

$$F(x, y) = y \exp\left[\int_{x_0}^{x}\left(\frac{b}{a}\right)\mathrm{d}t\right] - \int_{x_0}^{x}\left\{\left(\frac{c}{a}\right)(t)\exp\left[\int_{x_0}^{t}\left(\frac{b}{a}\right)\mathrm{d}\tau\right]\cdot \mathrm{d}t\right\}.$$

Scriind egalitatea $F(x, y) = C$, se observă imediat că este posibilă explicitarea lui y (în funcţie de x şi C) :

$$y(x) = C\exp\left[-\int_{x_0}^{x}\left(\frac{b}{a}\right)(t)\,\mathrm{d}t\right] + \tag{2.13}$$

$$+ \exp\left[-\int_{x_0}^{x}\left(\frac{b}{a}\right)(t)\,\mathrm{d}t\right]\int_{x_0}^{x}\left(\frac{c}{a}\right)(t)\exp\left[\int_{x_0}^{t}\left(\frac{b}{a}\right)(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}t.$$

Dacă în ecuaţia (2.12) se împarte cu a şi se notează $\frac{b}{a} = p$, $\frac{c}{a} = f$, se obţine o formă mai simplă a ecuaţiilor liniare şi anume forma normală

$$y' + p(x)y = f(x), \quad p, f \in C^0(J) \tag{2.14}$$

pentru care egalitatea (2.13) ia o formă mai simplă

$$y(x) = C\exp\left[-\int_{x_0}^{x}p(t)\,\mathrm{d}t\right] + \tag{2.13'}$$

$$+ \exp\left[-\int_{x_0}^{x}p(t)\,\mathrm{d}t\right]\int_{x_0}^{x}f(t)\exp\left[\int_{x_0}^{t}p(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}t = y_h(x) + y_p(x),$$

dacă se utilizează notaţiile

$$y_h(x) = C\exp\left[-\int_{x_0}^{x}p(t)\,\mathrm{d}t\right],$$

$$y_p(x) = \exp\left[-\int_{x_0}^{x}p(t)\,\mathrm{d}t\right]\int_{x_0}^{x}f(t)\exp\left[\int_{x_0}^{t}p(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}t. \tag{2.15}$$

Se observă că y_h se deduce din relaţia (2.13') care-l determină pe y, dacă se presupune $f = 0$, deci y_h va verifica ecuaţia (2.14) cu $f = 0$, adică va verifica ecuaţia diferenţială

$$y' + p(x)y = 0 \tag{2.14'}$$

care se numeşte *ecuaţia liniară şi omogenă corespunzătoare ecuaţiei* (2.14) (deoarece $y = 0$ este o soluţie particulară a acesteia) iar y_p [definit prin a doua egalitate (2.15)], deoarece se obţine din (2.13') pentru $C = 0$, va fi o soluţie a ecuaţiei (2.14), pe care o vom numi *soluţie particulară a ecuaţiei* (2.14).

Egalitatea $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, $x \in J$, unde J este intervalul de continuitate a funcţiilor p şi f care în cazul ecuaţiilor liniare (2.14) se numesc respectiv coeficientul şi termenul liber al acestor ecuaţii, arată că în cazul ecuaţiilor liniare (2.14) [sau al ecuaţiilor (2.12) cu modificările corespunzătoare] orice soluţie este formată dintr-o sumă de două soluţii speciale, y_h şi y_p, cu y_h soluţia care depinde de o constantă multiplicativă a ecuaţiei (2.14') iar y_p o soluţie oarecare a aceleiaşi ecuaţii. Această proprietate a ecuaţiilor diferenţiale liniare de ordinul întîi se extinde la orice altă ecuaţie diferenţială liniară de ordinul superior lui unu şi este utilă în aplicaţii : este suficient să-l determinăm pe y_h şi dacă se poate obţine o soluţie particulară y_p a ecuaţiei în cauză, orice soluţie a ecuaţiei se poate obţine prin determinarea constantei C din suma $y_h + y_p$.

De exemplu, în cazul ecuaţiei $y' - 2xy = 3x$, se observă că $y_p(x) = -\frac{3}{2}$ iar ecuaţia omogenă $y' - 2xy = 0$ fiind o ecuaţie cu variabilele separabile, din egalitatea $\frac{1}{y}\mathrm{d}y - 2x\mathrm{d}x = 0$ rezultă $y_h(x) = C\exp(x^2)$ şi, prin urmare, soluţia y căutată va fi $y(x) = C\exp(x^2) - \frac{3}{2}$ (la exerciţii vom reveni asupra acestor ecuaţii).

2.4.4. Ecuaţii reductibile la tipurile anterioare

Vom considera acum cîteva tipuri de ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi care se integrează uşor prin anumite substituţii care le aduc la una din formele tratate mai înainte.

2.4.4.1. *Ecuaţiile diferenţiale de forma*

$$y' = f(ax + by + c),\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a, b, c \in \mathbb{R},\ b \neq 0, \qquad (2.16)$$

se transformă într-o ecuaţie de tipul 2.4.2 cu ajutorul substituţiei $y \to z$, $z = ax + by + c$, deci $y' = \frac{1}{b} z' - \frac{a}{b}$; ecuaţia transformată va fi $\frac{1}{b} z' = f(z) + \frac{a}{b}$.

2.4.4.2. *Ecuaţiile omogene* sînt ecuaţiile diferenţiale (2.2) în care f este o funcţie omogenă de grad zero în x şi y [deci $f(tx, ty) = t^0 f(x, y)$] şi luînd $t = \frac{1}{x}$ avem identitatea $f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right)$.

Prin urmare, prin ecuaţii diferenţiale omogene de ordinul întîi se vor înţelege ecuaţiile (2.2) de forma

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (2.17)$$

care se reduc la ecuaţii de tipul 2.4.2 prin substituţia naturală $\frac{y}{x} = z$ (deci $y' = xz' + z$) iar ecuaţia transformată va fi $xz' = g(z) - z$, ale cărei soluţii sînt determinate în $\mathbb{R}^2$ exceptînd $x = 0$ şi punctele z_j în care $g(z_j) = z_j$ (evident $z = z_j$, deci $y = z_j x$ sînt soluţii ale ecuaţiei date).

2.4.4.3. *Ecuaţiile reductibile la ecuaţiile omogene* sînt ecuaţiile diferenţiale de ordinul întîi de forma

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right),\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a_j, b_j, c_j \in \mathbb{R},\ j = 1, 2. \qquad (2.18)$$

Aceste ecuaţii se reduc fie la ecuaţii de forma (2.16) dacă $\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = 0$, ceea ce face ca ecuaţia (2.18) să se scrie

$$y' = f\left[\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{k(a_1 x + b_1 y) + c_2}\right],\ k \in \mathbb{R},$$

deci va fi de forma $y' = f_1(a_1 x + b_1 y)$ cu $f_1(z) = f\left(\frac{z + c_1}{kz + c_2}\right)$, fie la ecuaţii de forma (2.17) dacă $\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \neq 0$, prin efectuarea translaţiei $x = \xi + x_0$, $x = \eta + y_0$ care mută originea axelor în punctul (x_0, y_0) în care se intersectează dreptele $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$, $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$, în care caz se va obţine o ecuaţie de forma

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1 \xi + b_1 \eta}{a_2 \xi + b_2 \eta}\right).$$

2.4.4.4. *Ecuaţiile Bernoulli* sînt ecuaţiile de forma

$$y' + p(x)y = q(x)y^r,\ p, q \in C^0(J),\ r \in \mathbb{R},\ r \neq 0,\ r \neq 1,\ y > 0. \qquad (2.19)$$

Acestea se pot reduce la ecuaţii liniare, deci de forma (2.14), prin substituţia $z = y^{1-r}$; se va obţine ecuaţia

$$z' + (1-r)\,p(x)z = (1-r)\,q(x) \qquad (2.19')$$

care se integrează în baza elementelor expuse la punctul 2.4.3.

Restricţia $y > 0$ este impusă, deoarece y^r nu este definit pentru $r \in \mathbb{R}$ dacă $y < 0$. Dacă însă $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$, este posibilă integrarea ecuaţiilor Bernoulli şi dacă $y < 0$ în modul următor: dacă r este număr impar, avem $(-y)^r = -y^r$ şi atunci notînd $-y = u$, din ecuaţia (2.19), prin înmulţire cu -1 se obţine ecuaţia $u' + p(x)u = q(x)u^r$, în care $u > 0$ şi s-a obţinut situaţia descrisă mai sus; dacă r este un număr par, deci $(-y)^r = y^r$, prin înmulţirea ecuaţiei (2.19) cu -1 şi notînd iarăşi $-y = u$, se va obţine ecuaţia Bernoulli $u' + p(x)u = -q(x)u^r$, în care, deoarece $u > 0$, se pot aplica procedeele normale de rezolvare.

2.4.4.5. *Ecuaţiile Riccati* sînt ecuaţiile diferenţiale de ordinul întîi de forma

$$y' + p(x)\,y + q(x)\,y^2 = r(x),\ p, q, r \in C^0(J),\ q \neq 0. \qquad (2.20)$$

Particularitatea acestor ecuaţii constă în aceea că soluţiile lor nu pot fi găsite întotdeauna prin reducerea lor la formele tratate anterior, deci este în general imposibil să se integreze ecuaţia (2.20) cu ajutorul funcţiilor elementare (teorema lui Liouville). Dacă însă se cunoaşte o

soluție particulară y_1 a ecuației (2.20), deci dacă $y_1 : J_1 \to \mathbb{R}$, $J_1 \subset J$, $y_1'(x) + p(x)y_1 + q(y)y_1^2 = r(x)$, $x \in J_1$, atunci se verifică ușor că substituția $y \to z$, $y = y_1 + \dfrac{1}{z}$ conduce la ecuația diferențială liniară

$$z' - [p(x) + 2y_1(x)\, q(x)]z = q(x),$$

a cărei soluție fiind $z = z_h + z_p$, rezultă punînd $z_h = Cz_1$, $y = y_1 + \dfrac{1}{Cz_1 + z_p} = \dfrac{\alpha(x)C + \beta(x)}{z_1(x)C + z_p(x)}$, deci orice soluție a ecuației Riccati (2.20) este o funcție omografică de constanta C.

Exemple

6. Ecuația $x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$, în care $|x|<1$, $|y|<1$, este cu variabilele separabile; factorul integrant fiind $\mu(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}$, rezultă primitiva $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = F(x, y)$.

7. Ecuația $y' = \dfrac{(x+y)^a}{(x+y)^b + (x+y)^c} - 1$ cu $a, b, c \in \mathbb{R}$, $x + y > 0$, este o ecuație diferențială de forma (2.16), deci cu substituția $x + y = z$, adică $y' = z' - 1$, se obține ecuația simplă $z' = \dfrac{z^a}{z^b + z^c}$, care este cu variabile separabile și prin integrare se obține (revenind la variabilele inițiale)

$$F(x, y) = \frac{(x+y)^{-a+b+1}}{-a+b+1} + \frac{(x+y)^{c-a+1}}{c-a+1} - x,$$

dacă $-a + b \neq 1$, $c - a \neq -1$ (dacă $b - a = -1$, $c - a = -1$, apar logaritmi)

8. Ecuația diferențială $xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2}$, scrisă sub forma $y' = \dfrac{\sqrt{x^2 - y^2} + y}{x} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2} + \dfrac{y}{x}$ este evident o ecuație omogenă, deci de forma (2.17); cu substituția $\dfrac{y}{x} = z$ se obține ecuația $x\dfrac{dz}{dx} = \sqrt{1 - z^2}$ și deci $F(x, y) = \arcsin\left(\dfrac{y}{x}\right) - \ln|x|$ $\left(\text{evident } \left|\dfrac{y}{x}\right| < 1\right)$.

9. Ecuația diferențială $(x - y + 4)y' + (x + y - 2) = 0$ scrisă sub forma normală $y' = -\dfrac{x+y-2}{x-y+4}$ arată că este vorba de o ecuație de tipul (2.18); deoarece $\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -2 \neq 0$, se efectuează transformarea liniară $x = \xi - 1$, $y = \eta + 3$ [valorile $(-1, 3)$ se obțin rezolvînd sistemul $x + y - 2 = 0$, $x - y + 4 = 0$ și se obține ecuația omogenă $\dfrac{d\eta}{d\xi} = \dfrac{\xi + \eta}{\xi - \eta}$, pentru care se efectuează schimbarea $\eta = \xi \cdot u$, ceea ce conduce la ecuația $\dfrac{d\xi}{\xi} + \dfrac{1-u}{1+2u-u^2}\,du = 0$. Deci $F(\xi, \eta) = \ln|\xi| + \dfrac{1}{2}\ln|1 + 2u - u^2|$. Notînd $F(\xi, \eta) = \ln|C|$ și revenind la variabilele inițiale se va obține $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C$.

10. În cazul ecuației diferențiale $y' = -\dfrac{x+y+1}{2x+2y-1}$ avem $\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 0$ și deci, dacă se efectuează substituția $x + y = z$, ceea ce conduce la ecuația $dx = \dfrac{2z-1}{z-2}\,dz$, se obține $F(x, y) = x + 2y + 3\ln|x + y - 2|$.

11. Ecuația diferențială $xy' + y = f(x)$ este liniară; integrarea ei se poate realiza nu neapărat urmărind metodele anterioare deoarece se observă că $xy' + y = (xy)'$ și deci $(xy)' = f(x)$, de unde rezultă $y = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + \frac{c}{x}$, ceea ce este echivalent cu $F(x, y) = xy - \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ (evident, calculele sînt valabile în domenii care nu conțin axa $x = 0$).

12. În cazul ecuației Riccati $y' = y^2 + \dfrac{2}{x}y - \dfrac{4}{x^2}$ se pot căuta soluții de forma $y_1(x) = Ax^r$, $A, r \in \mathbb{R}$ $(x > 0)$; prin înlocuire se obține $r = -1$, $A = 1$ (sau $A = -4$). Așadar, cu substituția $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z}$, care conduce la ecuația liniară $xz' + 4z = -x$ pentru care $z_h = Cx^{-4}$ și $z_p = -\dfrac{1}{5}x$, deci $z(x) = Cx^{-4} - \dfrac{1}{5}x$, adică $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{5x^4}{5C - x^5} = \dfrac{5C + 4x^5}{5Cx - x^6}$.

13. Ecuația diferențială $y' + \frac{1}{x} y + xy^4 = 0$ este o ecuație Bernoulli; dacă $y>0$, punînd $z = y^{-3}$, se obține ecuația $z' - \frac{3}{x} z = 3x$ pentru care $z_h = Cx^3$ și $z_p = -3x^2$, adică $z = Cx^3 - 3x^2$, de unde $y = \frac{1}{(Cx^2 - 3x^2)^{1/3}}$. Dacă $y<0$, notînd $-y = u$, se va obține ecuația $u' + \frac{1}{x} u = xu^4$, pentru care calcule asemănătoare cu cele anterioare conduc la soluția $y = \frac{-1}{(Cx^3 + 3x^2)^{1/3}}$.

14. Să se arate că dacă $y_h(x) = Cf(x)$ este soluție a ecuației omogene $y' + p(x)y = 0$, atunci, considerînd y de forma $C(x)f(x)$, se poate determina funcția C astfel încît $y = Cf$ să fie soluție a ecuației $y' + py = q$ (metoda variației constantei). Prin înlocuire se obține $C'f + C(f' + pf) = q$ și, deoarece $f' + pf = 0$, rezultă că C este o primitivă pentru cîtul $\frac{q}{f}$.

15. Pentru ecuația Bernoulli $y' + py = qy^r$, $y>0$, $r \in \mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$, se poate determina un factor integrant de forma $\mu(x, y) = y^{\alpha}\cdot\mu(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, deoarece scriind ecuația sub forma simetrică $(py - qy^r)dx + dy = 0$, prin înmulțire cu $y^{\alpha}\mu(x)$, ecuația cu derivate parțiale a factorului integrant se va scrie $y^{\alpha}\mu'(x) = \mu(x)\,[(\alpha + 1)p(x)y - q(x)\,(r + \alpha)y^{r-1+\alpha}]$ și este suficient să se pună $\alpha = -r$; se obține $\frac{\mu'}{\mu} = (\alpha + 1)p$ și deci $\mu(x) = \exp\left[(\alpha + 1)\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt\right]$, adică $\mu(x, y) = y^{-r}\exp\left[(\alpha + 1)\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt\right]$.

Pentru ușurința limbajului, în viitor vom înțelege prin *soluție generală* a unei ecuații diferențiale de ordinul întîi o soluție a sa care conține un parametru real nedeterminat.

2.5. Ecuații diferențiale de ordinul întîi sub formă implicită

2.5.1. Elemente de linie regulate și singulare

Vom lua în considerație ecuațiile diferențiale de ordinul întîi scrise sub forma

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2.1}$$

unde $F : J \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă; această ecuație va defini de asemenea un cîmp de direcții în $D_2 \subset \mathbb{R}^2$, format cu ajutorul mulțimii de elemente de linie (x, y, p), pentru care

$$F(x, y, p) = 0. \tag{2.21}$$

Diferența dintre cîmpul de direcții definit aici și cel definit anterior constă în faptul că acum unui punct $(x, y) \in D_2$ pot să-i corespundă mai multe soluții în p ale ecuației (2.21).

Astfel, de exemplu, pentru ecuația diferențială de ordinul întîi dar de grad n,

$$(y')^n + F_1(x, y)\,(y')^{n-1} + \ldots + F_{n-1}(x, y)y' + F_n(x, y) = 0, \tag{2.22}$$
$$F_j : D_2 \to \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

dacă este posibil să se rezolve (algebric) în raport cu y' astfel încît

$$y' = f_k(x, y),\ f_k : D_2 \to \mathbb{R},\ k = 1, 2, \ldots, m \leqslant n, \tag{2.23}$$
$$f_k \in C^0(D_2),$$

atunci unui punct $(x, y) \in D_2$ îi vor corespunde $m \leqslant n$ valori pentru p.

Se spune că $(x_0, y_0, p_0) \in D_3 \subset \mathbb{R}^3$ este un *element de linie regulat* al ecuației (2.1) dacă există o vecinătate $V_0 \subset D_3$ a lui (x_0, y_0, p_0) astfel încît, dacă $(x, y, p) \in V_0$, să existe o singură soluție $p = f(x, y)$, cu f funcție continuă în vecinătatea V_0' a lui (x_0, y_0), cu proprietatea $F[x, y, f(x, y)] = 0$, $(x, y) \in V_0'$.

În caz contrar, elementul de linie (x_0, y_0, p_0) se numește *singular*.

În baza teoremei funcțiilor implicite, dacă $F \in C^1(D_3)$, atunci elementul de linie (x_0, y_0, p_0) va fi regulat dacă se verifică relațiile

$$F(x_0, y_0, p_0) = 0 \quad \text{și} \quad F_p(x_0, y_0, p_0) \neq 0, \quad F_p = \frac{\partial F}{\partial p}, \tag{2.24}$$

și va fi singular dacă se verifică ecuațiile

$$F(x_0, y_0, p_0) = 0 \quad \text{și} \quad F_p(x_0, y_0, p_0) = 0. \tag{2.24'}$$

Astfel, de exemplu, în cazul ecuației diferențiale $y'^2 = x^2$ avem $F(x, y, p) = p^2 - x^2$, deci $F_p(x, y, p) = 2p$ și vor fi verificate egalitățile (2.24') numai dacă $p_0 = 0$ și $x_0 = 0$ și deci elementele de linie singulare ale ecuației $y'^2 = x^2$ vor avea forma $(0, y, 0)$.

2.5.2. Reprezentări parametrice ale soluțiilor ecuațiilor (2.1)

Pentru ecuațiile diferențiale $F(x, y, y') = 0$ nu este posibilă întotdeauna determinarea soluțiilor sub forma $y = \varphi(x)$ și de aceea se utilizează reprezentări parametrice ale curbelor integrale. Astfel, în cazul ecuațiilor diferențiale de forma

$$x = f(y'), \quad f : J \to \mathbb{R}, \quad f \in C^1(J), \tag{2.25}$$

se poate utiliza parametrul $p = y'$; se obține $x = f(p)$ iar cum $dy = pdx$, rezultă $dy = pf'(p)dp$ și deci $y = \int pf'(p)\,dp + C$. Așadar, curbele integrale ale ecuației (2.25) vor avea următoarea reprezentare parametrică:

$$x = f(p), \quad y = \int pf'(p)\,dp + C. \tag{2.25'}$$

În cazul ecuațiilor diferențiale

$$y = f(y'), \qquad f \in C^1(J), \tag{2.26}$$

același procedeu conduce la următoarea reprezentare parametrică a curbelor integrale:

$$x = \int \frac{f'(p)}{p}\,dp + C, \quad y = f(p). \tag{2.26'}$$

Procedeul anterior poate fi utilizat și în cazul *ecuației lui Clairaut*, adică în cazul ecuațiilor diferențiale de ordinul întîi avînd forma

$$y = xy' + f(x'), \quad f \in C^1(J). \tag{2.27}$$

Notînd $y' = p$ și derivînd ecuația (2.27) în raport cu x, se obține $p'[x + f'(p)] = 0$, de unde, dacă $p' \neq 0$, se găsește $x = -f'(p)$. Înlocuind în (2.27) variabila x prin $-f'(p)$, se obține reprezentarea parametrică a unei curbe integrale pentru ecuația (2.27)

$$x = -f'(p), \quad y = -pf'(p) + f(p). \tag{2.27'}$$

Dar soluția (2.27') nu este singura posibilă; corespunzător lui $p' = 0$ (deci $y' = \text{const}$) din (2.27) rezultă familia de soluții

$$y = Cx + f(C) \tag{2.27''}$$

care verifică pentru orice $C \in J$ ecuația (2.27) (deoarece $y' = C$), deci este soluția generală. Mulțimea de soluții (2.27'') reprezentă o familie de drepte în plan iar înfășurătoarea acestei familii de drepte, adică rezultatul eliminării lui C dintre (2.27'') și derivata acesteia în raport cu C, va conduce exact la soluția (2.27').

Procedeul indicat în cazul ecuației (2.27) se poate utiliza și în cazul *ecuațiilor de tip Lagrange* care au forma

$$y = xf(y') + g(y'), \qquad f, g \in C^1(J); \tag{2.28}$$

derivînd în raport cu x egalitatea $y = xf(p) + g(p)$, se obține o nouă egalitate $[xf'(p) + g'(p)]\,\frac{dp}{dx} = p - f(p)$, care, în ipoteza că x este funcția necunoscută, conduce la ecuația diferențială liniară $\frac{dx}{dp} = x\,\frac{f'(p)}{p - f(p)} + \frac{g'(p)}{p - f(p)}$, din care se determină $x = x(p)$, care înlocuit în (2.28), îl determină pe $y = y(p) = x(p)f(p) + g(p)$. Aceste considerații sînt valabile numai dacă $f(p) \neq p$; dacă $f(p) = p$, $p \in J$, se obține ecuația Clairaut (2.27) iar dacă există $p_0 \in J$ astfel încît $f(p_0) = p_0$ (deci p_0 este un punct fix al aplicației f), atunci din $y' = p_0$ rezultă $y = p_0 x + c$, unde pentru ca această funcție să verifice ecuația (2.28), trebuie să luăm $c = g(p_0)$.

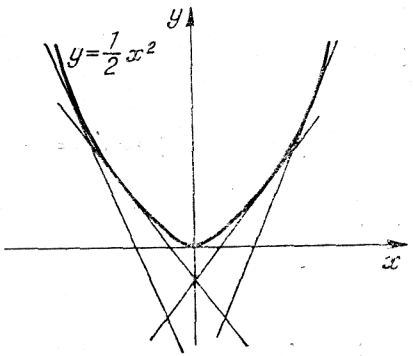

Fig. 2.2. Traiectoriile ecuației Clairaut $y = xy' - \frac{1}{2}y'^2$.

În cazul ecuației $F(x, y, y') = 0$ se poate obține întotdeauna o reprezentare parametrică utilizînd y' ca parametru notat cu p; din relația $y' = p$ rezultă $dy = pdx$ și dacă $y = y(p)$, $x = x(p)$, deci $dy = \dot{y}\,dp$, $dx = \dot{x}dt$, va rezulta $\dot{y} = p\dot{x}$, iar prin derivarea identității $F[x(p), y(p), p] = 0$ în raport cu p se obține o nouă identitate $F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_p = 0$, din care, deoarece $\dot{y} = p\dot{x}$, se deduc egalitățile

$$\dot{x} = -\frac{F_p}{F_x + pF_y}, \quad \dot{y} = -\frac{pF_p}{F_x + pF_y}, \tag{2.29}$$

iar, prin integrare, se ajunge la reprezentarea parametrică amintită.

Evident, integrarea relațiilor (2.29) este în general dificilă, dar uneori acestea reprezintă ecuații diferențiale simple. În particular,

dacă este vorba de ecuația diferențială $x=f(y, y')$, adică dacă pentru ecuația $F(x, y, y') = 0$ este ușor de explicitat x, atunci, deoarece $F(x, y, p) = x-f(y, p)$, din (2.29) rezultă

$$x = f(y, y') \Rightarrow \dot{y} = \frac{pf_p(y, p)}{1 - pf_y(y, p)}, \quad x = f[y(p), p], \qquad (2.29')$$

iar dacă ecuația $F(x, y, y') = 0$ se explicitează în raport cu y, rezultă

$$y = g(x, y') \Rightarrow \dot{x} = \frac{g_p(x, p)}{p - g_x(x, p)}, \quad y = g[x(p), p]; \qquad (2.29'')$$

deci de fiecare dată este necesară doar o singură integrare.

Exemple

16. $y = y'^2 + 2y'^3$; punînd $y' = p$, rezultă $y = p^2 + 2p^3$ și deoarece $\dot{x} = \frac{y}{p}$, rezultă $\dot{x} = 2 + 6p$, adică $x = 2p + 2p^2 + C$ și reprezentarea parametrică a curbelor integrale va fi $x = 2p + 3p^2 + C$, $y = p^2 + 2p^3$.

17. Dacă se consideră ecuația $a^2y'^{2/3} + b^2y^{2/3} = 1$, atunci este comodă reprezentarea parametrică $y = \frac{1}{b}\cos^3 t$, $y' = \frac{1}{a}\sin^3 t$, de unde rezultă $dx = \frac{dy}{p}$ cu $p = \frac{1}{a}\sin^3 t$ $(= y')$, deci $dx = \frac{-3a\cos^2 t \sin t}{b \sin^3 t}dt = -\frac{3a}{b}\operatorname{ctg}^2 t\, dt$, adică $x = \frac{3a}{b}\int\left(1 - \frac{1}{\sin^2 t}\right)dt = \frac{3a}{b}(t + c\operatorname{tg} t) + C$. Prin urmare, orice soluție a ecuației date se obține din $x = \frac{3a}{b}(t + c\operatorname{tg} t) + C$, $y = \frac{1}{b}\cos^3 t$.

18. Fie ecuația $2y' + 3y'^2 = x$; punînd $y' = p$, se obține ușor familia de curbe integrale: $x = 2p + 3p^2$, $y = p^2 + 2p^3 + c$.

19. Ecuația $y = xy' + \frac{a}{y'}$, $a \in \mathbb{R}$, este o ecuație Clairaut; cele două soluții posibile vor fi $y = cx + \frac{a}{c}$ (familia de drepte care depinde de parametrul a, adică soluția generală) și înfășurătoarea acestora $y = px + \frac{a}{p}$, $x = +\frac{a}{p^2}$; deci, eliminînd parametrul p, se găsește $y = 2\sqrt{ax}$.

20. Ecuația Lagrange $y = 2xy' + \ln y'$ admite următoarea reprezentare parametrică pentru curbele integrale: $x = -\frac{1}{p} + \frac{c}{p^2}$, $y = \ln p + \frac{2c}{p} - 2$, deoarece, punînd $y'=p$, rezultă $y = 2xp + \ln p$ și deci, derivînd în raport cu x, se obține ecuația liniară $\frac{dx}{dp} = -\frac{2}{p}x - \frac{1}{p^2}$ care integrată conduce la funcțiile specificate.

EXERCIȚII ȘI COMPLETĂRI

1° Utilizînd metoda izoclinelor, să se traseze aproximativ traiectoriile ecuației diferențiale $y' = \cos(x + y)$.

Rezolvare. Punînd $y' = k \in \mathbb{R}$, se obține ecuația izoclinelor $\cos(x + y) = k$ (adică $|k| \leqslant 1$); pentru $k = 0$, $\cos(x + y) = 0$ conduce la $y = -x + \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, deci curbele integrale au tangenta orizontală în punctele de intersecție ale acestora cu aceste izocline. Deoarece $y'' = -(1 + y')\sin(x + y) = -[1 + \cos(x + y)]\sin(x + y)$, pentru $x + y = \frac{\pi}{2} + n\pi$ avem $y'' = (-1)^{n+1}$, deci $y''<0$ pentru n par și $y''>0$ pentru n impar, adică curbele integrale au puncte de maxim în punctele de intersecție cu izoclinele $y = -x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, și puncte de minim, în punctele de intersecție cu izoclinele $y = -x + \frac{\pi}{2} + (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Pentru $k = \pm 1$, adică pentru $x + y = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, respectiv $x + y = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, izoclinele sînt drepte paralele iar cele corespunzătoare lui $k = -1$ vor fi în același timp traiectorii ale ecuației în cauză iar celelalte drepte vor fi intersectate de traiectorii sub unghi de 45°. Așadar, traiectoriile în cauză se prezintă sub formă de drepte înclinate cu 135° față de axa absciselor intersectînd această axă în punctele $\frac{\pi}{2} + (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, și curbe care între două drepte din familia anterioară au un singur maxim și un singur minim.

2° Să se determine un factor integrant și apoi să se integreze ecuațiile:

$$2xydx - (y + x^2)dy = 0,\ y(x^2\sqrt{x^2 + 1} + y^2)dx + 2xy^2 \ln x\, dy = 0,$$

$$2xydx - (x^2 + y^2 + 1)dy = 0.$$

R. $\mu(x, y) = \frac{1}{y^2}$, $y = c\exp\left(\frac{x^2}{y}\right)$; $\mu(x, y) = \frac{1}{xy}$, $3y^2 \ln x + (1 + x^2)^{3/2} = C$;

$$\mu(x, y) = \frac{1}{(1 + x^2 - y^2)^2}, \quad 1 + x^2 - y^2 = Cy.$$

3° Să se arate că ecuațiile liniare și ecuațiile Bernoulli se pot integra căutînd soluții de forma $y = uv$, unde u și v se determină convenabil.

Rezolvare. În cazul ecuației $y' + p(x)y = f(x)$ se obține egalitatea $u'v + u(pv + v') = f$ care este verificată dacă v se determină astfel încît $v' + pv = 0$ și deci $u' = f/v$; în cazul ecuației Bernoulli $y' + p(x)y = f(x)y^r$, $y > 0$, v se determină din aceeași condiție $v' + pv = 0$ iar u din egalitatea $u' = fv^{r-1}u^r$.

4° Să se integreze ecuațiile diferențiale:

$$x^2(x^3 + 1)y' + x(2x^3 - 1)y = x^3 - 2\,;\; 2(x+1)y' + 2y + (x+1)^4y^3 = 0\,;$$

$$(x + 1)e^{-x}y' - ae^{-x}y = (1 + x)^a,\ a \in \mathbb{R}.$$

R. Sînt ecuații liniare sau Bernoulli: $y = \dfrac{Cx}{1 + x^3} + \dfrac{1}{x}$, $2y^{-2} = (x + 1)^4 + c(x + 1)^2$, $y = (c + e^x)(1 + x)^a$.

5° Să se integreze ecuațiile:

$$(bx^2 + 2cxy + dy^2)y' + (ax^2 + 2bxy + cy^2) = 0, (7x - 3y + 3)dx + (3x - 7y + 7)dy = 0$$

$$(x + y - 2)y' = 1 - 2x - 2y.$$

Sînt ecuații omogene sau reductibile la omogene:

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = A,\quad (x + y - 1)^5(x - y + 1)^2 = C,$$

$$x + y + 1 = C\exp\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y\right).$$

6° Să se determine soluțiile următoarelor ecuații (nediferențiale) prin reducerea lor la ecuații diferențiale:

a) $\displaystyle\int_0^1 f(xt)\,dt = af(x),\ a \in \mathbb{R}$; b) $\displaystyle\int_0^x e^{x-t}f'(t)\,dt = g(x)$, g funcție cunoscută.

R. a) Punînd $xt = s$ și apoi derivînd, se găsește $f(x) = a[xf(x)]'$ deci $f(x) = Cx^{\frac{1-a}{a}}$, $a \neq 0$. b) Ecuația se scrie $\displaystyle\int_0^x e^{-t}f'(t)\,dt = e^{-x}g(x)$ și derivînd se obține $f' = g' - g$, $\displaystyle f = g - \int_0^x g\,dt + C$.

7° Să se determine soluțiile generale și soluțiile singulare ale ecuațiilor diferențiale:

a) $yy'^2 - 2xy'^3 = 1$; b) $2yy'^2 = 2xy'^3 + 1$; c) $2y(y' + 2) = xy'^2$; d) $y = xy' - 2\sqrt{1 + y'^2}$.

R. a) și c) sînt ecuații Lagrange dacă se explicitează y iar b) și d) sînt ecuații Clairaut.

a) $x = Cp^{-2} - 2p^{-3}$; $y = 2Cp^{-1} - 3p^{-2}$; b) $y = Cx + \dfrac{1}{2C^2}$, soluție singulară $y = \dfrac{3}{2}x^{2/3}$;

c) $y = \dfrac{1}{C}(x - C)^2$, soluții singulare $y = -4x$, $y = 0$; d) $y = Cx - 2\sqrt{1 + C^2}$, soluție singulară $x^2 + y^2 = 4$.

8° Să se arate că dacă în ecuația $f\,dx + g\,dy = 0$, f și g sînt funcții omogene și de același grad, atunci $(xf + yg)^{-1}$ este un factor integrant.

Indicație. Se scrie ecuația factorului integrant care va deveni o identitate dacă se scrie $\mu = (xf + yg)^{-1}$; se utilizează identitatea Euler pentru funcții omogene.

9° Să se arate că dacă ecuația $f\,dx + g\,dy = 0$ este exactă iar f și g sînt funcții omogene și de același grad, atunci o primitivă a ecuației este $F(x, y) = xf(x, y) + yg(x, y)$.

Indicație. Scriind identitatea lui Euler pentru funcțiile omogene f și g, prin utilizarea identității $f_y = g_x$, se obține egalitatea $x\,df + y\,dg = 0$, adică $d(xf + yg) - (f\,dx + g\,dy) = 0$.

10° Să se găsească soluțiile singulare ale ecuațiilor diferențiale:

a) $xy^2y' - y^3y' + x = 0$; b) $(y - xy')(2y' - 1) - 2y' = 0$; c) $y'^2 - yy' = f(x)$.

Indicație. Prin eliminarea lui y' între ecuațiile $f(x, y, y') = 0$ și $f_{y'}(x, y, y') = 0$ se obțin următoarele soluții singulare: a) $y^2 = \pm 2x$; b) $2xy = \left(\dfrac{x}{2} + y - 1\right)^2$; $y = \pm 2\sqrt{-f(x)}$.

11° Următoarele ecuații diferențiale, deși nu sînt de ordinul întîi, se pot integra prin reducerea lor la ecuații diferențiale de ordinul întîi prin diverse substituții:

a) $F(x, y', y'') = 0$, b) $F(y, y', y'') = 0$; c) $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}) = 0$;

d) $F(y^{(k)}, y^{(k+1)}, y^{(k+2)}) = 0$.

Indicație. În a) se notează $y' = z$ și se obține $F(x, z, z') = 0$; în b) se consideră $y' = p(y)$ funcție necunoscută și y variabilă independentă, deci $y'' = \dfrac{dy'}{dx} = p'(y) \cdot y' = p' \cdot p$, obținîndu-se ecuația $F(y, p, pp') = 0$; c) se notează $y^{(k)} = z$ și se obține ecuația $F(x, z, z') = 0$ iar d) se reduce la b) cu substituția $y^{(k)} = z$.

12° Să se arate că soluția generală a ecuației diferențiale $y^{(k)} = f(x)$, $f \in C^0[a, b]$ se poate scrie sub forma $y(x) = \dfrac{1}{(k-1)!}\displaystyle\int_{x_0}^x (x - t)^{k-1}f(t)\,dt + R_{k-1}(x)$, unde R_{k-1} este un polinom de grad $k - 1$ cu coeficienți arbitrari iar $x_0 \in [a, b]$.

R. Notînd $I_k(x) = \dfrac{1}{(k-1)!}\displaystyle\int_{x_0}^x (x - t)^{k-1}f(t)\,dt$, avem $I_k' = I_{k-1}$, deci $I_k^{(k-1)} = I_1 = \displaystyle\int_{x_0}^x f(t)\,dt$ iar $I_k^{(k)} = f$.

13° Să se găsească soluția generală a ecuațiilor următoare:

a) $y'' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$; b) $2yy'' = y'^2$; c) $y^3y'' = a$, $a \in \mathbb{R}$; d) $y' - y'' x \ln x = 0$.

R. a) $y = -\ln|\cos x| + ax + b$; b) $y = (ax + b)^2$; c) $a + by^2 = b^2(x + c)^2$; d) $y = a(\ln x - 1)x + b$.

14° Să se justifice metoda variației constantei pentru integrarea ecuației liniare $y' + p(x)y = f(x)$ care constă în următoarele etape:

a) se integrează ecuația omogenă corespunzătoare, obținîndu-se $y = \varphi(x; c)$;

b) se presupune $c = c(x)$ și se determină această funcție astfel încît $\varphi[x; c(x)]$ să verifice ecuația neomogenă.

Indicație. a) Se obține $y(x) = c \exp P(x)$, unde $P' = p$; b) funcția c va verifica ecuația $c' = f \exp(-P)$; înlocuind acest c în soluția anterioară y, se obține exact soluția ecuației în cauză.

CAPITOLUL 3

Spații metrice. Spații vectoriale normate. Spații prehilbertiene

3.1. Spații metrice

Fie S o mulțime oarecare; se spune că în această mulțime s-a definit o *metrică* (sau o *distanță*), dacă există o aplicație $d: S \times S \to \mathbb{R}$ cu următoarele proprietăți:

D1: $d(x, y) \geqslant 0$ pentru orice $x, y \in S$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

D2: $d(x, y) = d(y, x)$ pentru orice $x, y \in S$ (proprietatea de simetrie);

D3: $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ pentru orice $x, y, z \in S$ (inegalitatea triunghiului).

În această situație mulțimea S devine un *spațiu metric* notat prin (S, d) dar $d(x, y)$ este *distanța* dintre elementele x și y din S; de obicei, elementele mulțimii S, dacă (S, d) este spațiu metric, se numesc *puncte*.

Este ușor de văzut că de fapt orice mulțime S poate fi considerată spațiu metric (S, d) dacă definim distanța $d(x, y)$ astfel:

$d(x, y) = 0$ dacă $x = y$ și $d(x, y) = 1$ dacă $x \neq y$ (se verifică imediat axiomele D1 — D3), dar această metrică (numită *metrică discretă*) nu poate fi utilizată în aplicațiile care ne sînt necesare în continuare. Spațiile metrice care vor fi utilizate mai frecvent în viitor vor fi:

1°. Spațiul $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ factori}}$, $n \in \mathbb{N}$, unde $x \in \mathbb{R}^n$ dacă $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, iar $d(x, y) = |x - y| = [(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2]^{1/2}$ cu $y \in \mathbb{R}^n$, deci $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

În particular, pentru $n = 1$, se obține $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ iar $d(x, y) = |x - y|$ și deci distanța dintre două numere reale este valoarea absolută a numărului real $x - y$.

2°. Spațiul $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$ (deci $z \in \mathbb{C}$ dacă și numai dacă $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$), unde $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{1/2}$, dacă $z_1 = y_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, x_j, $y_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2$.

3°. Spațiul funcțiilor integrabile Riemann pe un compact $D_n \subset \mathbb{R}^n$, notat prin $R(D_n) : f \in R(D_n)$ dacă $\int_{D_n} |f| < \infty$; aici $d(f,g) = \int_{D_n} |f - g|$.

4°. Spațiul funcțiilor continue pe un compact $\bar{D}_n$ din $\mathbb{R}^n$ cu distanța $d(f, y) = \max_{x \in D_n} |(f - g)(x)|$.

5°. Spațiul funcțiilor de clasă $C^r(\bar{D}_n)$, $r \in \mathbb{N}$, $\bar{D}_n \subset \mathbb{R}^n$, fiind un compact, cu distanța

$$d(f, g) = \max_{x \in \bar{D}_n} \left\{ |f - g|, \left| \frac{\partial (f - g)}{\partial x} \right|, \ldots, \left| \frac{\partial^r (f - g)}{\partial x^r} \right| \right\},$$

unde

$$\frac{\partial^k f(x)}{\partial x^k} = \frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_n} f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$$

iar $k_1 + \ldots + k_n = k$, $k_j \in \mathbb{Z}_+$.

6°. Spațiul $M_{m,n}$ al matricelor dreptunghiulare cu m linii și n coloane: $\mathbf{A} \in M_{m,n}$ dacă $\mathbf{A} = [a_{jk}]$, $j = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$, $a_{jk} \in \mathbb{C}$, în care distanța $d(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ dintre două matrice din $M_{m,n}$ se definește prin $d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \max_{1 \leqslant j \leqslant m} \sum_{k=1}^{n} |a_{jk} - b_{jk}|$ (aici evident $\mathbf{B} = [b_{jk}]$).

7°. Spațiul $S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ va fi un spațiu metric dacă S_j este un spațiu metric cu metrica d_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, punînd sau $d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) + \ldots + d_n(x_n, y_n)$, sau $d^2(x, y) = d_1^2(x_1, y_1) + d_2^2(x_2, y_2) + \ldots + d_n^2(x_n, y_n)$, dacă $x, y \in S$, deci $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, x_j, $y_j \in S_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Axiomele D1 — D3 ale metricei se pot verifica ușor în fiecare caz în parte, utilizînd proprietățile elementelor spațiilor în cauză; este de remarcat că în una și aceeași mulțime S se pot introduce mai

multe metrici d, d', d'' etc.; se vor considera însă spațiile metrice (S, d), (S, d'), (S, d''), ... diferite între ele (în general). Astfel, în $\mathbb{C}$ (exemplul 2°) se poate pune $d'(z_1, z_2) = \max \{|\mathrm{Re}(z_1 - z_2)|, |\mathrm{Im}(z_1 - z_2)|\}$ iar în $M_{m,n}$ se poate utiliza metrica $d'(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |a_{jk} - b_{jk}|$; în viitor însă se vor utiliza mai mult metricele indicate mai sus.

O observație importantă este aceea că dacă (S, d) este un spațiu metric iar $S_1 \subset S$, atunci (S_1, d) este de asemenea un spațiu metric (evident, prin d în submulțimea S_1 din S se înțelege distanța din S dar considerată numai ca aplicație la elementele lui S_1, numită *metrica indusă*).

Fie (S, d) un spațiu metric; dacă $x \in S$ iar $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, prin *sferă deschisă* de rază r și centru x, notată $B_r(x)$ se înțelege mulțimea punctelor din S a căror distanță la x este mai mică decît r. Deci

$$B_r(x) = \{y \mid y \in S,\ d(y, x) < r\} \subset S.$$

Prin *sfera închisă* $B_r[x]$ de rază r și centrul x se va înțelege mulțimea

$$B_r[x] = \{y \mid y \in S,\ d(y, x) \leqslant r\} \subset S.$$

Un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ din S, (S, d) fiind un spațiu metric, se spune că este *convergent* către $x \in S$, dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, se poate determina $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+$ astfel încît $d(x_n, x) < \varepsilon$, dacă $n \geqslant N$, adică $x_n \in B_\varepsilon(x)$ pentru toți $n \in \mathbb{N}$ cu $n \geqslant N$; punctul x definit mai sus se numește *limita* șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și se scrie

$$x_n \to x \text{ sau } \lim x_n = x \text{ sau } \lim_{n \to \infty} x_n = x.$$

Un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ din S se spune că este un *șir fundamental* sau un *șir Cauchy* din S, (S, d) fiind spațiu metric, dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ se poate determina $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+$ astfel încît $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ dacă $n, m \geqslant N$. Orice șir convergent din S este fundamental, deoarece $d(x_n, x_m) \leqslant d(x_n, x) + d(x, x_m) < 2\varepsilon$, $n, m \geqslant N$, dar reciproca nu este adevărată, în general.

Spațiul metric (S, d) se spune că este un *spațiu metric complet*, dacă orice șir fundamental din S converge către un element din S; în caz contrar, spațiul metric în cauză se spune că este *spațiu metric incomplet*.

În exemplele anterioare, spațiile metrice 1°, 2°, 4°, 5°, 6° sînt complete, spațiul de la exemplul 3° este incomplet iar spațiul metric de la exemplul 7° este complet dacă toate spațiile metrice (S_j, d_j) sînt complete.

Se poate ataşa fiecărui spaţiu metric incomplet (S, d) un spaţiu metric complet $(\bar{S}, \bar{d})$, astfel încît (S, d) este un subspaţiu al spaţiului metric $(\bar{S}, \bar{d})$ iar S este o mulţime densă în mulţimea $\bar{S}$, adică pentru orice $\bar{x} \in \bar{S}$ şi orice $\varepsilon > 0$, există $x \in S$ cu proprietatea $\bar{d}(\bar{x}, x) < \varepsilon$. Spaţiul $(\bar{S}, \bar{d})$ se numeşte *completatul* lui (S, d) şi este unic determinat [dacă se face abstracţie de o izometrie, adică dacă se face abstracţie de o aplicaţie $f: \bar{S} \to \bar{S}'$ bijectivă, cu proprietatea $\bar{d}(x, y) = \bar{d}'(f(x), f(y))$, pentru orice $x, y \in \bar{S}$, $(\bar{S}', \bar{d}')$ fiind un spaţiu metric]; în mod intuitiv, deducerea lui $\bar{S}$ din S se face adăugindu-se la S elemente noi, obţinute ca limite abstracte ale tuturor şirurilor fundamentale din S.

De exemplu, în cazul tratat la 3°, completatul spaţiului metric incomplet $R[a, b]$ în raport cu metrica $d(f, g) = \int_{[a,b]} |f - g|$ este spaţiul $L_1[a, b]$ al funcţiilor integrabile Lebesgue, în modul, în $[a, b]$.

Dacă $A \subset S$ este o mulţime închisă a spaţiului complet (S, d), atunci spaţiul (A, d) va fi de asemenea un spaţiu metric complet, deoarece dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un şir fundamental din A, atunci va fi fundamental şi din S, deci există $\lim_{x \to \infty} x_n = x \in S$ iar x va fi element din A, deoarece este un punct limită al lui A iar A fiind mulţime închisă îşi va conţine punctele limită.

3.2. Spaţii vectoriale normate

Notînd $K = \mathbb{R}$ (sau $K = \mathbb{C}$) şi denumind K *corpul scalarilor*, mulţimea X va fi un *spaţiu vectorial* (= *spaţiu liniar*) dacă în X se poate defini o operaţie de *adunare* a elementelor (adică la orice pereche $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ corespunde un singur element $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in X$, numit *suma* elementelor $\mathbf{x}$ şi $\mathbf{y}$ (cu proprietăţile $\mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$, $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$, există $\mathbf{0} \in X$ astfel încît $\mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in X$ iar pentru orice $\mathbf{x} \in X$, există $-\mathbf{x} \in X$ astfel încît $\mathbf{x}+(-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$) şi o operaţie de *înmulţire cu scalari* (adică pentru orice $a \in K$ şi orice $\mathbf{x} \in X$ se poate defini un singur element $a\mathbf{x} \in X$, cu proprietăţile $(ab)\,\mathbf{x} = a(b\mathbf{x})$, $a(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a\mathbf{x} + b\mathbf{y}$, $(a + b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} + b\mathbf{x}$, oricare ar fi $a, b \in K$ şi $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$; în plus $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$, pentru orice $\mathbf{x} \in X$).

Dacă avem $K = \mathbb{R}$, atunci X este un *spaţiu vectorial real* iar pentru $K = \mathbb{C}$, X este un *spaţiu vectorial complex*. Elementele unui spaţiu vectorial se numesc *vectori*.

Exemple

8. Spaţiul $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ factor}}$ este un spaţiu vectorial real dacă se definesc cele două operaţii astfel:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \quad a\mathbf{x} = (ax_1, \ldots, ax_n)$$

pentru $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ şi $a \in \mathbb{R}$.

9. Spaţiul $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$ este fie un spaţiu vectorial real, fie un spaţiu vectorial complex, dacă prin $z_1 + z_2$ se înţelege numărul complex $(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$, unde $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, 2$, iar $az = ax + ay$ dacă $a \in \mathbb{R}$ şi $az = (a_1x_1 - a_2y) + i(a_1y + a_2x)$ dacă $a = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$.

10. Spaţiile de la exemplele 3°–5° anterioare sînt evident spaţii vectoriale (reale sau complexe), dacă $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, iar $(af)(x) = af(x)$.

În orice spaţiu vectorial X se poate introduce noţiunea de *combinaţie liniară* a elementelor din X; astfel, prin combinaţie liniară a elementelor $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p \in X$ se înţelege vectorul $\mathbf{x} = a_1\mathbf{x}_1 + \ldots + a_p\mathbf{x}_p \in X$ cu $a_1, \ldots, a_p$ scalari.

Dacă însă egalitatea anterioară pentru $\mathbf{x} = 0$ este posibilă numai dacă $a_1 = \ldots = a_p = 0$, atunci vectorii $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p$ se numesc *liniar dependenţi*; în caz contrar (deci dacă $a_1\mathbf{x}_1 + \ldots + a_p\mathbf{x}_p = 0$ iar $|a_1| + \ldots + |a_p| > 0$) aceiaşi vectori se vor numi *liniar dependenţi*. Spaţiul vectorial X se numeşte *finit dimensional*, dacă orice $\mathbf{x} \in X$ se poate scrie ca o combinaţie liniară a unui număr finit de vectori din X; în caz contrar, X se numeşte *infinit dimensional*.

De exemplu, spaţiul $\mathbb{R}^n$ este finit dimensional, pe cînd spaţiul $C^r(\bar{D}_n)$ este infinit dimensional.

Orice mulţime B de vectori liniar independenţi din X, cu proprietatea că orice $\mathbf{x} \in X$ este o combinaţie liniară cu vectori din B, se numeşte *bază* în X; scriind $\mathbf{x} = \sum_j a_j \mathbf{x}_j$, $a_j \in K$, $\{\mathbf{x}_j\} = B$, scalarii a_j sînt unic determinaţi şi se numesc *coordonatele* lui $\mathbf{x}$ în raport cu baza B.

Dacă X şi Y sînt spaţii vectoriale în care corpul scalarilor este K, o aplicaţie $f: X \to Y$ se spune că este *liniară*, dacă pentru orice $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$, iar $f(a\mathbf{x}) = af(\mathbf{x})$ pentru orice $a \in K$ şi orice $\mathbf{x} \in X$.

O aplicaţie liniară se mai numeşte şi *operator* (sau *transformare*) *liniar* (*liniară*) iar dacă $Y = \mathbb{R}$ (pentru $K = \mathbb{R}$) sau $Y = \mathbb{C}$ (pentru $K = \mathbb{C}$), aplicaţia liniară f se numeşte *funcţională*.

Aplicația $N : X \to \mathbb{R}_+$, unde X este un spațiu vectorial, se numește *norma* elementului $\mathbf{x} \in X$, și se notează $N(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$, dacă se verifică axiomele :

N1 : $\|\mathbf{x}\| \geqslant 0, \|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$;

N2 : $\|a\mathbf{x}\| = |a| \|\mathbf{x}\|$ pentru orice $\mathbf{x} \in X$ și orice $a \in K$;

N3 : $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (inegalitatea triunghiului) pentru orice $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$.

Orice spațiu vectorial în care se poate introduce o normă, se numește *spațiu vectorial normat*. Orice spațiu vectorial normat este un spațiu metric, metrica putînd fi definită prin

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Toate exemplele de spații metrice de la punctul unu sînt de fapt exemple de spații vectoriale normate. (Dar nu trebuie să se creadă că orice spațiu metric este un spațiu vectorial normat, din simplul motiv că într-un spațiu metric oarecare nu are sens $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ sau $a\mathbf{x}$).

Spațiile vectoriale normate și complete se numesc *spații Banach*.

3.3. Spații prehilbertiene

Un spațiu vectorial X în care corpul scalarilor este K se numește *prehilbertian* dacă în X se poate introduce un *produs scalar*, adică o aplicație $p : X \times X \to K$ cu următoarele proprietăți (notînd $p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$] :

P1 : $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$ pentru orice $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$;

P2 : $(a\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ pentru orice $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ și orice $a \in K$;

P3 : $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$ pentru orice $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \in X$;

P4 : $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geqslant 0$, $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$.

Din P1 și P2 rezultă

P'2 : $(\mathbf{x}, a\mathbf{y}) = \bar{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, oricare ar fi $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ și $a \in K$,

$\bar{a} = \operatorname{Re} a - i \operatorname{Im} a$,

deoarece $(\mathbf{x}, a\mathbf{y}) = \overline{(a\mathbf{y}, \mathbf{x})} = \overline{a(\mathbf{y}, \mathbf{x})} = \bar{a}\overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})} = \bar{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, iar din P1 și P3 rezultă

P'3 : $(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + (\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)$ pentru orice $\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in X$, deoarece $(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \overline{(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2, \mathbf{x})} = \overline{(\mathbf{y}_1, \mathbf{x})} + \overline{(\mathbf{y}_2, \mathbf{x})} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + (\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)$, iar din P1 — P2 — P3 — P'2 — P'3 rezultă egalitatea

$$\left(\sum_{j=1}^{m} a_j \mathbf{x}_j, \sum_{k=1}^{n} b_k \mathbf{y}_k\right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_j \bar{b}_k (\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_k) ; \tag{3.1}$$

în fine, din (3.1) și P4 rezultă *inegalitatea lui Schwartz*

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leqslant \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}\ \sqrt{(\mathbf{y}, \mathbf{y})}.$$

Dacă $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, (3.2) este evident ; dacă $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0$, deoarece $(\mathbf{x} + a\mathbf{y}, \mathbf{x} + a\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2 \operatorname{Re}\bar{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + |a|^2 (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \geqslant 0$, luînd $a = b \dfrac{|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|}{(\mathbf{y}, \mathbf{y})}$, $b \in \mathbb{R}$, se obține inegalitatea $b^2(\mathbf{y}, \mathbf{y}) + 2b|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| + (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geqslant 0$ care este posibilă numai dacă se verifică (3.2).

Orice spațiu prehilbertian este un spațiu vectorial normat, norma putînd fi definită prin

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}, \quad \mathbf{x} \in X ; \tag{3.3}$$

deci inegalitatea lui Schwartz se transcrie sub forma

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leqslant \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|. \tag{3.2'}$$

Într-adevăr, din P 4 se obține $\|\mathbf{x}\| \geqslant 0$ iar $\|\mathbf{x}\| = 0$ implică $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$, deci $\mathbf{x} = 0$; din P 2 și P'2 rezultă $\|a\mathbf{x}\| = \sqrt{(a\mathbf{x}, a\mathbf{x})} = \sqrt{|a|^2 (\mathbf{x}, \mathbf{x})} = |a| \|\mathbf{x}\|$ iar din (3. 3), (3.1) și (3.2') avem $\|x + \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leqslant \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2$, ceea ce este echivalent cu inegalitatea triunghiului.

Importanța spațiilor prehilbertiene constă în aceea că în ele se pot defini noțiunea de *ortogonalitate* pentru două elemente : dacă X este un spațiu prehilbertian, vectorii $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ vor fi ortogonali ($\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$) dacă $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Pentru doi vectori ortogonali $\mathbf{x}$ și $\mathbf{y}$ este valabilă egalitatea $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$, numită *teorema lui Pitagora* și se extinde la orice șir finit $(\mathbf{x}_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, cu $(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k) = 0$, $j \neq k$; $\left\| \sum_{j=1}^{n} \mathbf{x}_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|\mathbf{x}_j\|^2$.

Un spațiu prehilbertian complet se numește *spațiu Hilbert*.

Exemple

11. Dacă $f, g : D_n \to \mathbb{C}$, f și g fiind integrabile Riemann pe $\overline{D}_n$, notînd

$$(f, g) = \int_{D_n} f\bar{g},$$

spațiul $R(\overline{D}_n)$ devine un spațiu prehilbertian incomplet, prin completarea căruia se obține spațiul Hilbert $L_2(D_n)$ (al funcțiilor integrabile Lebesque și avînd pătratul integrabil pe $\overline{D}_n$).

12. Dacă $f, g : D_n \to C$, $f, g \in C^k(\overline{D}_n)$, notînd

$$(f, g)_k = \int_{D_n} \left(f\bar{g} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial^j f}{\partial x^j} \frac{\partial^j \bar{g}}{\partial x^j} \right), \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

spațiul $C^k(\overline{D}_n)$ devine un spațiu prehilbertian incomplet; prin procedeul de completare se obține *spațiul lui Sobolev* $H^k(D_n)$, care este un spațiu Hilbert (evident, $H^0 = L_2$).

3.4. Mulțimi compacte

Dacă (S, d) este un spațiu metric, submulțimea $A \subset S$ se numește *compactă* (prin șiruri) dacă din orice șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ din A se poate extrage un subșir $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$, convergent în A; submulțimea $B \subset S$ se numește *relativ compactă*, dacă mulțimea $\bar{B}$ (obținută prin atașarea la B a tuturor punctelor limită ale lui B) este compactă.

Orice mulțime compactă din spațiul metric (S, d) este închisă (adică își conține punctele limită) și mărginită (adică $A \subset B_R(x_0)$, cu $x_0 \in S$, $R \in \mathbb{R}_+$), dar reciproca nu este, în general, adevărată; în particular, în $\mathbb{R}^n$, orice mulțime închisă și mărginită este compactă.

O aplicație $f : A \to S$, $A \subset S$, se numește *compactă* în A cînd mulțimea $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ este relativ compactă.

Aplicația $f : A \to S$ se spune că este *aproximativ rezolvabilă* în A, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $x \in A$, astfel încît $d(x, f(x)) < \varepsilon$.

Teorema 3.1. *Dacă $f : A \to S$ este continuă, compactă și aproximativ rezolvabilă în A și dacă A este o mulțime închisă a spațiului metric (S, d), atunci aplicația f admite un punct fix în A, adică există $\bar{x} \in A$, astfel încît $f(\bar{x}) = \bar{x}$.*

⌜ Luînd $\varepsilon = \frac{1}{n}$ există $x_n \in A$, astfel încît $d(x_n, f(x_n)) < \frac{1}{n}$; pentru $n \in \mathbb{N}$, se obține șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ din A, căruia i se poate atașa șirul $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ din S cu $y_n = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Deoarece $y_n \in f(A)$, iar $f(A)$ este relativ compactă, șirul $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ din $f(A)$ va admite un subșir convergent: $y_{n_k} \underset{k \to \infty}{\to} y \in S$ și va rezulta $x_{n_k} \to y$ deoarece $d(x_{n_k}, y) \leqslant$ $\leqslant d(x_{n_k}, y_{n_k}) + d(y_{n_k}, y_{n_k}) < \varepsilon$, pentru că $d(x_{n_k}, y_{n_k}) = d(x_{n_k}, f(x_{n_k})) <$ $< \frac{1}{n_k}$ și $d(y_{n_k}, y) \to 0$ cînd $k \to \infty$. Aceasta înseamnă că $y \in A$ (deoarece A este o mulțime închisă) și $f(y) = y$, deoarece $d(f(y), y) \leqslant$ $\leqslant d(f(y), y_{n_k}) + d(y_{n_k}, y) < \varepsilon$ (în baza continuității lui f și convergenței lui y_{n_k} către y). ⌟

3.5. Teorema de punct fix Banach (principiul contracției)

Fie (S, d) și (S', d') două spații metrice și fie $f : S \to S'$; se spune că f este o *aplicație lipschitziană* de la S la S', dacă pentru orice $x, y \in S$ are loc inegalitatea

$$d'(f(y), f(x)) \leqslant Ld(y, x), \; L \in \mathbb{R}_+; \tag{3.4}$$

numărul real L din (3.4) se numește *constanta lui Lipschitz* iar dacă în plus $L = q \in]0, 1[$, atunci aplicația f se numește *contracție* și q este *constanta de contracție*. Orice aplicație lipschitziană este evident o aplicație uniform continuă.

Teorema 3.2. *Dacă $f : S \to S$ este o contracție a spațiului metric complet (S, d), atunci f admite în S un singur punct fix $\bar{x}$, adică are loc egalitatea*

$$f(\bar{x}) = \bar{x}. \tag{3.5}$$

Fie x_0 arbitrar din S și fie șirul aproximațiilor (iteratelor) succesive $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ definit prin $x_n = f(x_{n-1})$ sau $x_n = f^n(x_0)$, $f^n = \underbrace{f[f(\ldots)]}_{n \text{ ori}}$, $n \in N$.

Deoarece

$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leqslant qd(x_{n-1}, x_n) = qd(f(x_{n-2}), f(x_{n-1})) \leqslant$
$\leqslant q^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leqslant \ldots \leqslant q^n d(x_1, x_0)$,

va rezulta că șirul iteratelor $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un șir fundamental din S:

$d(x_{n+p}, x_n) \leqslant d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leqslant$
$\leqslant (q^n + q^{n+1} + \ldots + q^{n+p-1}) d(x_0, x_1) \leqslant q^n(1 + q + q^2 + \ldots) d(x_0, x_1) =$

$$= \frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1)$$

și deci $d(x_{n+p}, x_n) \to 0$ cînd $n \to \infty$ pentru orice $p \in \mathbb{N}$. Cum (S, d) este un spațiu metric complet, există $\bar{x} \in S$, astfel încît $x_n \to \bar{x}$; deoarece $d(\bar{x}, f(\bar{x})) \leqslant d(\bar{x}, x_n) + d(x_n, f(\bar{x})) = d(\bar{x}, x_n) + d(f(x_{n-1}), f(\bar{x})) \leqslant$
$\leqslant d(\bar{x}, x_n) + qd(x_{n-1}, \bar{x}) \to 0$ cînd $n \to \infty$, rezultă $d(\bar{x}, f(\bar{x})) \leqslant 0$, ceea ce înseamnă $d(\bar{x}, f(\bar{x})) = 0$, deci $f(\bar{x}) = \bar{x}$ și $\bar{x}$ este un punct fix. Dacă $y \in S$ ar fi un alt punct fix pentru f, ar rezulta $d(\bar{x}, y) =$
$= d(f(\bar{y}), f(y)) \leqslant qd(\bar{x}, y)$, adică $(1-q)\, d(\bar{x}, y) \leqslant 0$ și cum $1-q > 0$, neapărat $d(\bar{x}, y) = 0$, adică $y = \bar{x}$. ⌟

Evident, în cazuri concrete date punctul fix $\bar{x}$ poate fi aproximat printr-o iterată oarecare x_n iar eroarea care apare în această situație se poate deduce din inegalitatea $d(x_{n+p}, x_n) \leqslant \frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1)$ făcînd $p \to \infty$ și deci

$$d(\bar{x}, x_n) \leqslant \frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1). \tag{3.6}$$

Fie acum două contracții f, g ale spațiului metric (S, d) în el însuși; aceste aplicații se spune că sînt ε-vecine, dacă pentru orice $x \in S$,

$$d(f(x), g(x)) \leqslant \varepsilon. \tag{3.7}$$

Teorema 3.3. *Dacă f și g sînt două contracții ε-vecine ale spațiului metric complet (S, d) în el însuși, atunci punctele fixe ale acestor aplicații sînt* ε_1-vecine, $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{1-q}$, $q = \max\{q_1, q_2\}$, $d(f(x), f(y)) \leqslant$
$\leqslant q_1 d(x, y)$, $d(g(x), f(y)) \leqslant q_2 d(x, y)$.

⌜ Vom scrie $d(f(x), f(y)) \leqslant qd(x, y)$, $d(g(x), g(y)) \leqslant qd(x, y)$, $0 < q < 1$, și fie $\bar{x}$ punctul fix al lui f și $\bar{y}$ punctul fix al lui g; se poate presupune $y_n \to \bar{y}$ cu $y_0 = \bar{x}$, $y_1 = g(y_0) = g(\bar{x})$ etc. Calculînd $d(\bar{x}, y_n)$, se obține

$d(\bar{x}, y_n) \leqslant (1 + q + \ldots)\, d(\bar{x}, y_1) = \frac{1}{1-q} d(\bar{x}, g(\bar{x}))$ și pentru $n \to \infty$ se obține $d(\bar{x}, \bar{y}) \leqslant \frac{1}{1-q} d(f(\bar{x}), g(x)) \leqslant \frac{\varepsilon}{1-q}$. ⌟

O altă teoremă importantă de punct fix este datorită lui Schauder și care are următorul enunț (fără demonstrație):

Teorema 3.4 (*de punct fix Schauder*). *Dacă A este o submulțime închisă și convexă a unui spațiu Banach B și dacă $f : A \to B$ este o aplicație continuă și compactă cu $f(A) \subset B$, atunci f admite în A cel puțin un punct fix.*

(O mulțime $A \subset X$, X fiind spațiu vectorial, este convexă dacă pentru orice $x, y \in A$, avem $tx + (1-t)\, y \in A$ pentru orice $t \in [0, 1]$).

CAPITOLUL 4

Existența și unicitatea soluțiilor problemei Cauchy pentru ecuații și sisteme diferențiale

4.1. Cazul unei ecuații diferențiale reale

Să presupunem că ecuația diferențială (scalară) scrisă sub formă normală

$$y' = f(x, y) \tag{4.1}$$

trebuie integrată în așa fel încît soluția (dacă există) să verifice condiția inițială

$$y(x_0) = y_0. \tag{4.2}$$

Vom presupune $f : D_2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in D_2$ (D_2 fiind un domeniu din $\mathbb{R}^2$), iar în plus f este continuă în D_2 și este lipschitziană în al doilea argument :

$$d(f(x, y_1), f(x, y_2)) \leqslant Ld(y_1, y_2), \tag{4.3}$$

$L \in \mathbb{R}_+$, y_1, y_2 fiind arbitrari cu (x, y_1), $(x, y_2) \in D_2$, unde $d(u, v) = |u - v|$, $u, v \in \mathbb{R}$ (o condiție suficientă ca f să fie lipschitziană în D_2 este ca să existe $\frac{\partial f}{\partial y}$ iar $\left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right| \leqslant M$, $(x, y) \in D_2$, deoarece în baza teoremei creșterilor finite, $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |y_1 - y_2| \cdot \left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right| \leqslant M |y_1 - y_2|$).

Teorema 4.1. *Dacă $f \in C(D_2)$ și verifică (4.3) în D_2, atunci există $\varphi : \bar{J} \to \mathbb{R}$, $\bar{J} = [x_0 - h, x_0 + h]$, $h > 0$, φ fiind derivabilă în intervalul J, astfel încît $\varphi(x_0) = y_0$ iar $\varphi'(x) = f[x, \varphi(x)]$ pentru $x \in J$.*

⌜ Deoarece f este continuă în D_2, vom avea $|f(x, y)| \leqslant m$ dacă $(x, y) \in G_2 \subset D_2$, unde G_2 conține punctul (x_0, y_0) și să alegem $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$, astfel încît să avem $(x, y) \in G_2$ dacă $x \in \bar{J} = [x_0 - h, x_0 + h]$, $|y - y_0| \leqslant mh = q_1$ și $Lh = q < 1$.

Fie $C^* = \{g\}$ mulțimea funcțiilor continue pe $\bar{J}$ și care verifică în plus condiția $|g(x) - y_0| \leqslant q_1$; evident, C^* este un spațiu metric (nu este spațiu vectorial !) în care metrica este $d(g_1, g_2) = \max_{x \in \bar{J}} |g_1(x) - g_2(x)|$ iar C^* este complet, deoarece este un subspațiu închis al spațiului Banach al funcțiilor continue pe $\bar{J}$. Fie acum aplicația $A : C^* \to C^*$ definită prin

$$(Ag)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, g(t)]\,dt, \quad x \in \bar{J}, \tag{4.4}$$

unde f este definit prin ecuația (4.1) [avem $Ag \in C^*$ deoarece $\int_{x_0}^{x} f[t, g(t)]\,dt \in C^1(J)$, căci f este o aplicație continuă în x și y iar g este continuă în $\bar{J}$, deci $f[t, g(t)] \in C^0(\bar{J})$ și, prin urmare, $\int_{x_0}^{x} f[t, g(t)]\,dt \in C^1(J)$ iar $|(Ag)(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f[t, g(t)]\,dt\right| \leqslant mh = q_1$].

Să arătăm că A este o contracție :

$$d(Ag_1, Ag_2) = \left|\int_{x_0}^{x} \{f(t, g_1(t)] - f[t, g_2(t)]\}\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f[t, g_1(t)] - f[t, g_2(t)]|\,dt\right| \leqslant L\left|\int_{x_0}^{x} |g_1(t) - g_2(t)|\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant Lh \max_{t \in \bar{J}} |g_1(t) - g_2(t)| = qd(g_1, g_2).$$

Prin urmare, există un singur punct fix al aplicației A în C^* : $A\varphi = \varphi$, $\varphi \in C^*$; ținînd seama de (4.4), avem $\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, \varphi(t)]dt$, $x \in \bar{J}$.

Din această ultimă egalitate rezultă:

φ verifică (4.2), deoarece $\varphi(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} = y_0$;

φ este derivabilă pe J, deoarece $\int_{x_0}^{x} f[t, \varphi(t)]\,dt \in C^1(J)$

și deci $y_0 + \int_{x_0}^{x} f\,[t, \varphi\,(t)]\,dt \in C^1\,(J)$;

φ verifică ecuația (4.1), deoarece $\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f[t, \varphi(t)]\,dt = f[x, \varphi(x)]$

și deci $\frac{d}{dx}(A\,\varphi)\,(x) = \varphi(x)$.

4.2. Cazul unei ecuații diferențiale complexe

În ipoteza că în ecuația (4.1) funcția f are valori complexe, sînt importante două situații:

1° Cazul în care $f : \bar{J} \times D \to \mathbb{C}$, $\bar{J}$ fiind un interval închis al axei reale iar D o mulțime deschisă din planul complex, deci $f = f(x, y)$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{C}$.

2° Cazul în care $f : D \times D^* \to \mathbb{C}$, unde D și D^* sînt mulțimi deschise din $\mathbb{C}$, deci cazul în care $f = f(z, w)$, $z, w \in \mathbb{C}$.

Ambele aceste situații pot fi analizate pe baza rezultatelor de la 4.1 în modul următor:

În primul caz se presupune $g : \bar{J} \to \mathbb{C}$, deci $g(x) = g_1(x) + ig_2(x)$, $x \in \bar{J}$, $g_1 = \mathrm{Re}\,g$, $g_2 = \mathrm{Im}\,g$ iar în condiția inițială (4.2) $y_0 \in \mathbb{C}$; aici $g'(x) = g_1'(x) + ig_2'(x)$ și teorema 4.1 se poate aplica considerînd f ca o aplicație a spațiului metric $C^* = \{g\}$ în el însuși și x parametru real, metrica în C^* fiind

$$d(g, g^*) = \max_{x \in \bar{J}} |\,g(x) - g^*(x)\,| = \max_{x \in \bar{J}} \left[\,|g_1(x) - g_1^*(x)\,|^2 + \right.$$

$$\left. + |(g_2(x) - g_2^*(x)\,|^2\right]^{1/2}$$

(și aici $g \in C^*$ dacă g este continuă pe $\bar{J}$ iar $|g(x) - y_0| \leqslant mh = q_1$).

Asupra lui f trebuie impusă, în afara condiției Lipschitz (4.3) și ipoteza de continuitate în ambele variabile x și y:

$$d(f(x_1, y_1),\ f(x_2, y_2)\,) < \varepsilon, \text{ dacă } |\,x_1 - x_2\,| < \delta,\ |y_1 - y_2\,| < \delta,$$

$$\delta = \delta(\varepsilon),\ d\,(f_1, f_2) = |f_1 - f_2|.$$

În aceste ipoteze, teorema 4.1 rămîne valabilă și deci va exista o singură soluție $y = \varphi(x)$, $\varphi : \bar{J} \to \mathbb{C}$ a ecuației (4.1) care verifică (4.2).

De fapt, scriind $f = f_1 + if_2$, $f_1 = \mathrm{Re}\,f$, $f_2 = \mathrm{Im}\,f$, ecuația (4.1) și condiția (4.2) vor fi echivalente cu sistemul de două ecuații diferențiale reale $y_1' = f_1(x, y_1, y_2)$, $y_2' = f_2(x, y_1, y_2)$ la care se atașează condițiile inițiale $y_1(x_0) = \mathrm{Re}\,y_0$, $y_2(x_0) = \mathrm{Im}\,y_0$ ($y = y_1 + iy_2$) și se pot aplica rezultatele din 4.3.

În cazul al doilea vom scrie z și w în loc de x și y, deci ecuația (4.1) se va înlocui prin ecuația diferențială în complex

$$w' = f(z, w), \tag{4.1'}$$

căreia i se atașează condiția Cauchy

$$w(z_0) = w_0,\ w_0 \in \mathbb{C}. \tag{4.2'}$$

Teorema 4.1 rămîne în vigoare, cu diferența că soluția w trebuind să fie derivabilă, presupunem w funcție analitică iar pentru ca operatorul A definit de (4.4) să nu depindă de drumul de integrare (care unește punctul z_0 cu un punct z, astfel încît $|z - z_0| < h$) trebuie presupus f funcție analitică în ambele variabile z și w, ceea ce antrenează verificarea automată a condiției Lipschitz.

Așadar, în această situație, teorema 4.1 va avea următorul enunț

Teorema 4.2. *Dacă f din ecuația (4.1') este o funcție analitică pentru $z \in B_h(z_0)$ și $w \in B_{b1}(w_0)$, unde $h, q_1 \in \mathbb{R}_+$ se determină din condițiile $Lh < 1$, $mh = q_1$ (unde L este constanta Lipschitz și $|f(z, w)| \leqslant m$ dacă $z \in D$, $w \in D^*$, iar $B_r(a) = \{z \mid z \in \mathbb{C},\ |z - a| < r\}$, atunci există o singură soluție analitică în $B_h(z)$ a problemei (4.1'), (4.2').*

⌜ Demonstrația este evidentă: aplicația $(Aw)\,(z) = w_0 + \int_{z_0}^{z} f\,[t, w\,(t)]\,dt$ va admite un punct fix în spațiul metric al funcțiilor analitice în discul deschis $|z - z_0| < h$ iar acest punct fix este deci o funcție analitică în același disc, care verifică (4.2'). ⌟

4.3. Cazul unui sistem diferențial real n

Teorema 4.3. *Dacă se consideră un sistem de ecuații diferențiale scrise sub formă normală*

$$y_j'(x) = f_j[x, y_1(x), \ldots, y_n(x)], \quad j=1, 2, \ldots, n,$$

sau (4.5)

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \text{ cu } \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n), \mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$$

și condițiile inițiale

$$y_j(x_0) = y_{j_0}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.6}$$

atunci dacă f_j sînt definite și continue în domeniul $D_{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ care conține punctul $(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0})$ și verifică condiția Lipschitz)

$$d(\mathbf{f}(x, y_1, \ldots, y_n), \mathbf{f}(x, z_1, \ldots, z_n)) \leqslant Ld(\mathbf{y}, \mathbf{z}), \tag{4.7}$$

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \max_j \{|u_j(x) - v_j(x)|\},$$

atunci există o singură soluție $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) : \bar{J} \to \mathbb{R}^n$, cu $J = [x_0 - h, x_0 + h]$ a sistemului (4.5), care verifică datele (4.6).

⌜ Sistemul (4.5 împreună cu datele inițiale (4.6) va fi echivalent cu ecuația integrală vectorială

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}[t, \mathbf{y}(t)]\, dt, \quad \mathbf{y}_0 = (y_{10}, \ldots, y_{n0}), \tag{4.7'}$$

pentru care se pot repeta raționamentele de la demonstrația teoremei 4.1 și se va obține h din condiția $hL < 1$ iar în plus trebuie să se verifice și restricția $d(\mathbf{y}, \mathbf{y}_0) = \max_j \{|y_j(x) - y_{j_0}|\} < mh$, $m = \max_{G_{n+1}} \{|f_1(x, y_1, \ldots, y_n)|, \ldots, |f_n(x, y_1, \ldots, y_n)|\}$, unde $G_{n+1} \subset D_{n+1}$ conține punctul $(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0})$. ⌟

4.4. Cazul unei ecuații diferențiale de ordin n

Pentru ecuația diferențială (scalară) de ordinul n scrisă sub forma normală

$$y^{(n)} = f(x, y', \ldots, y^{(n-1)}), \quad f : D_{n+1} \to \mathbb{R}, \quad D_{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}, \tag{4.8}$$

căreia i se atașează condițiile inițiale

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \tag{4.8'}$$

$$y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R},$$

se poate demonstra imediat o teoremă de existență și unicitate a soluțiilor corespunzătoare, reducînd problema (4.8), (4.8') la o problemă (4.5), (4.6), punînd $y = y_1$, $y_1' = y_2, \ldots, y_{n-1}' = y_n$; deci din (4.8) rezultă $y_n' = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$; evident, condițiile (4.8') vor deveni $y_1(x_0) = y_0$, $y_2(x_0) = y_1, \ldots, y_n(x_0) = y_{n-1}$.

Presupunînd verificate condițiile teoremei 4.3 (ceea ce revine de fapt la a presupune f lipschitziană în raport cu ultimele n argumente și continuă în raport cu toate argumentele), se poate găsi un interval $J =]x_0 - h, x_0 + h[\subset \mathbb{R}$ astfel încît vectorul $(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ să fie de clasă $C^1(J)$ iar componentele acestui vector vor verifica sistemul $y_1' = y_2, \ldots, y_{n-1}' = y_n$, $y_n' = f(x, y_1, \ldots, y_n)$ și condițiile $y_j(x_0) = y_{j-1}$, $j = 1, \ldots, n$. Cum $y_1 = y$, $y_1' = y_2$, $y_2' = y_3$ etc.; va rezulta y de n ori derivabil (derivata de ordin n va fi continuă întrucît $y^{(n)} = y_n'$), iar y va verifica ecuația (4.8), condițiile inițiale (4.8') și va fi singura soluție de clasă $C^n(J)$ posibilă pentru problema în cauză.

De remarcat că dacă ecuația (4.8) sau sistemul (4.5) sînt liniare, deci, dacă $f[x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}] = a(x) + a_0(x)y + a_1(x)y' + \ldots + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}$ sau $f_i(x, y_1, \ldots, y_n) = b_j(x) + b_{1j}(x)y_1 + \ldots + b_{nj}(x)y_n$, atît continuitatea lui f (respectiv f_j) cît și condiția Lipschitz, va rezulta doar din continuitatea pe $\bar{J}$ a funcțiilor $a, a_0, \ldots, a_{n-1}$ (respectiv $b_j, b_{1j}, \ldots, b_{nj}$).

Trebuie menționat că teoremele anterioare nu epuizează nici pe departe mulțimea teoremelor de existență sau a teoremelor de unicitate pentru soluțiile ecuațiilor (sistemelor) diferențiale. Există numai teoreme de existență pentru soluțiile problemei Cauchy (care deci nu asigură și unicitatea soluției) care pot avea loc numai dacă ipotezele din teoremele anterioare nu sînt integral satisfăcute. Astfel, dacă nu se presupune decît continuitatea lui f din ecuația (4.1), atunci se poate întîmpla ca soluția să existe dar să nu fie unic determinată (teorema de existență Peano).

De exemplu, pentru ecuația diferențială $y' = 3y^{2/3}$ și condiția inițială $y(0) = 0$, în care $f(x, y) = 3y^{2/3}$ este funcție continuă în $\mathbb{R}^2$, dar nu este lipschitziană în origine (deoarece $|f(x, y) - f(x, 0)| = |y|^{2/3}$ și nu se poate scrie $|y|^{2/3}$ sub forma $L|y|$ cu $L \in \mathbb{R}_+$

pentru că raportul $\frac{|y|^{2/3}}{|y|}$ nu este mărginit pentru $y = 0$) se pot găsi cel puțin patru soluții care verifică atît ecuația cît și condiția inițială și anume :

$$y = f_1(x) = x^3, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y = f_2(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$y = f_3(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ x^3, & x > 0, \end{cases} \qquad y = f_4(x) = \begin{cases} x^3, & x \leqslant 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Teorema de existență Peano afirmă că dacă $f : D_2 \to \mathbb{R}$ este continuă în domeniul D_2, atunci pentru fiecare punct $(x_0, y_0) \in D_2$ se poate defini cel puțin o soluție $y = \varphi(x)$ a ecuației diferențiale $y' = f(x, y)$ cu proprietatea $\varphi(x_0) = y_0$ iar graficul acestei soluții poate fi prelungit pînă la frontiera lui D_2. (Această teoremă este valabilă și pentru sisteme diferențiale.) Adăugînd la condiția de continuitate pentru f (care asigură existența soluțiilor) diverse alte condiții suplimentare, se pot obține teoreme de unicitate pentru soluțiile problemei Cauchy.

De exemplu, dacă $f \in C(D_2)$ iar în vecinătatea punctului (x_0, y_0) este o funcție necrescătoare de variabilă y, atunci există o singură soluție $y = \varphi(x)$ a ecuației $y' = f(x, y)$ astfel încît $\varphi(x_0) = y_0$ sau dacă f verifică o condiție de tipul $f(x, y_2) - f(x, y_1) \leqslant g(x)\omega(y_2 - y_1)$ pentru $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$, $y_0 - h_1 \leqslant y_1 \leqslant y_2 \leqslant y_0 + h_1$ cu g continuă pe $[x_0, x_0 + h]$ iar $\omega(t)$ de asemenea continuă pentru $t \geqslant 0$, $\omega(0) = 0$ iar integrala $\int_0^h \frac{dt}{\omega(t)}$ fiind divergentă, iarăși se asigură unicitatea soluțiilor ecuației în cauză care verifică $\varphi(x_0) = y_0$.

Este de remarcat că multe ecuații sau sisteme diferențiale care provin din modelarea unor fenomene practice nu se pot încadra în teoremele de existență și unicitate prezentate mai sus ; nu avem decît să ne gîndim la ecuația Thomas-Fermi $\sqrt{x}\, y'' = \sqrt{y^3}$ ale cărei soluții trebuie determinate în $\mathbb{R}_+$; scrisă sub forma normală, ecuația conduce la $f(x, y, y') = x^{-1/2} y^{3/2}$, care nu posedă proprietatea de continuitate pentru $x = 0$ și deci teorema de existență nu are loc. Acest lucru se întîmplă ori de cîte ori apar ecuații care nu pot fi aduse la forma normală cu membrul drept funcție continuă.

Este deci natural să se definească punctele singulare ale unei ecuații acele puncte pentru care nu se pot aplica teoremele de existență ale soluțiilor (deși în vecinătatea acestora acestea sînt aplicabile) determinarea proprietăților soluțiilor în vecinătatea acestor puncte singulare care pot constitui linii singulare, dacă mulțimea lor

formează, de exemplu, o curbă, nu este o problemă simplă, după cum se poate constata prin exemplele următoare:

1. Ecuația diferențială $(x - a)y' = y$, $a \in \mathbb{R}$, are forma normală $y' = f(x, y)$, $f(x, y) = \frac{y}{x - a}$ iar f va fi o funcție continuă în $\mathbb{R}^2$ exceptînd punctele de pe dreapta $x = a$; soluția ecuației date care verifică $y(x_0) = y_0$ va fi $y(x) = y_0 \frac{x - a}{x_0 - a}$, dacă $x_0 \neq a$ și este vizibil că $y \in C^1(\mathbb{R})$ (deci soluția este derivabilă și în punctele în care f nu este continuă).

2. Ecuația diferențială de tip Riccati $y' + y^2 = 0$ se poate integra ușor ; se obține $y(x) = \frac{1}{x - c}$, $c \in \mathbb{R}$ și deci soluția are o singularitate în c, iar c poate fi orice punct al axei reale, fapt care nu apare direct din ecuația dată, unde $f(x, y) = -y^2$ și deci este funcție continuă în $\mathbb{R}^2$.

Aplicînd teorema de existență și unicitate, rezultă că soluția problemei Cauchy $y(x_0) = y_0$ va avea o singură soluție pentru orice $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$; această soluție va fi $y(x) = \frac{y_0}{y_0(x - x_0) - 1}$ și deci va fi continuă pentru $x = x_0$ (discontinuitatea apare în punctul $x_1 = x_0 + \frac{1}{y_0}$, dacă $y_0 \neq 0$, iar pentru $y_0 = 0$, soluția fiind $y = 0$, nu apare nici o discontinuitate).

Determinarea apriori a tuturor singularităților soluțiilor ecuațiilor diferențiale este posibilă numai în cazul ecuațiilor liniare, în care caz singularitățile soluțiilor provin numai din singularitățile coeficienților și se numesc *singularități fixe* ale ecuației ; în cazul ecuațiilor neliniare pot apărea și *singularități mobile*, care depind de problema care se studiază.

Revenind însă la prima teoremă de existență și unicitate (teorema 4.1), s-a văzut că un rol esențial în demonstrație îl joacă operatorul (4.4) ; dar este evident că acest operator se poate defini și în cazul în care nu se presupun f și g funcții continue, ceea ce poate conduce la lărgirea noțiunii de soluție pentru problema (4.1), (4.2).

Astfel dacă $\varphi : J \to \mathbb{R}$ este absolut continuă pe J, adică dacă $]x_{j-1}, x_j[$ sînt subintervale disjuncte ale lui J astfel încît $\sum_{j=1}^{p} (x_j - x_{j-1}) < \delta$ să avem $\left| \sum_{j=1}^{p} [\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})] \right| < \varepsilon$, pentru orice $\varepsilon > 0$,

$\delta = \delta(\varepsilon)$, va exista φ' aproape peste tot și φ va fi soluție pentru problema (4.1), (4.2) dacă $\varphi(x_0) = y_0$, $x_0 \in J$, iar $\varphi'(x) = f[x, \varphi(x)]$ pentru toți $x \in J$, exceptînd eventual o mulțime de măsură nulă de puncte din J.

Dacă există astfel de intervale J și astfel de funcții pentru ecuația diferențială (4.1) în care f este o funcție cu valori reale, nu neapărat continuă, pentru care apare situația anterioară, atunci φ se numește *soluție în sens Carathéodory* pe J a ecuației (4.1); este evident că orice soluție în sens Carathéodory a ecuației (4.1) devine automat o soluție în sens obișnuit a aceleiași ecuații dacă f este continuă (deoarece φ este continuă, fiind absolut continuă, iar atunci $f[x, \varphi(x)]$ va fi o funcție continuă, deci $\varphi \in C^1(J)$).

În legătură cu această definiție, este valabil rezultatul următor: dacă $f: J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este măsurabilă în raport cu x pentru orice y fixat și continuă în raport cu y pentru orice x fixat și dacă pe intervalul $|x - x_0| \leqslant h$ există funcția F măsurabilă (în sens Lebesgue), astfel încît $|f(x, y)| \leqslant F(x)$, atunci într-un subinterval $J = \{x \mid |x - x_0| \leqslant h_1,\ h_1 > 0\}$ există o soluție în sens Carathéodory a problemei (4.1), (4.2); dacă în plus există funcția măsurabilă Lebesgue $L(x)$, astfel încît $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L(x)|y_1 - y_2|$ în $J \times \mathbb{R}$, atunci soluția anterioară este unic determinată.

Cu modificări evidente, rezultatul anterior este valabil și în cazul sistemelor diferențiale (4.5).

Este ușor de constatat că soluția obținută prin teoremele anterioare se poate prelungi; astfel, dacă ne referim la teorema 4.1, soluția ecuației $y' = f(x, y)$ care verifică $y(x_0) = y_0$ există în intervalul $\bar{J} = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| \leqslant h\}$, unde $h > 0$ și se determină din condiția $Lh < 1$. Fie, de exemplu, $h = \dfrac{2}{3L}$ și să notăm prin φ_1 soluția ecuației $y' = f(x, y)$ care verifică $y(x_1) = y_1$, unde $x_1 = x_0 + h$ (sau $x_1 = x_0 - h$) iar $y_1 = \varphi(x_1)$ este valoarea soluției din teorema 4.1 în punctul x_1; evident φ_1 va fi o soluție unic determinată, definită pe un interval $\bar{J}_1 \subset \mathbb{R}$, a ecuației (4.1), care va coincide, în baza unicității soluției, cu soluția anterioară pe $\bar{J} \cap \bar{J}_1$ și de aceea putem considera funcția egală cu $\varphi(x)$, $x \in \bar{J}$, și egală cu $\varphi_1(x)$, $x \in \bar{J}_1$, ca fiind o soluție a problemei (4.1), (4.2) pe intervalul $\bar{J} \cup \bar{J}_1$. Acest procedeu de prelungire a soluției poate continua.

Teorema lui Peano amintită se poate demonstra cu ușurință dacă se iau în considerație două teoreme fundamentale ale analizei matematice:

— teorema de aproximare Weierstrass a funcțiilor continue pe un compact (în cazul care ne interesează, în ipoteza că f este funcție

continuă pe compactul $\bar{D}_2$, se poate determina un șir de polinoame în două variabile x și y, astfel încît dacă $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este acest șir, avem $f_n \to f$, convergența fiind uniformă în D_2, iar dacă $|f(x, y)| \leqslant M$, avem de asemenea $|f_n| \leqslant M$);

— teorema de relativ-compacitate a spațiului funcțiilor continue definite pe un compact (care afirmă că din orice mulțime de funcții continue pe intervalul $[a, b] \subset \mathbb{R}$, care este simultan uniform mărginită, adică $|\varphi| \leqslant K$, constanta K nedepinzînd de φ, dacă φ este un element oarecare al mulțimii de funcții continue considerate și echicontinuă, adică pentru orice $\varepsilon > 0$ se poate determina $\delta = \delta(\varepsilon)$, astfel încît $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon$, îndată ce $|x_1 - x_2| < \delta$, se poate extrage un șir uniform convergent în $[a, b]$).

Într-adevăr, considerînd ecuațiile diferențiale

$$y' = f_n(x, y),\ n \in \mathbb{N},$$

și condiția inițială $y(x_0) = y_0$, $(x_0, y_0) \in D_2$, deoarece f_n sînt polinoame, conform cu teorema 4.1 se poate determina șirul $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de soluții (avem $\varphi_n'(x) = f_n[x, \varphi_n(x)]$, $x \in V_{x_0}$, unde V_{x_0} este o vecinătate convenabilă a punctului x_0) cu proprietatea $\varphi_n(x_0) = y_0$. Acest șir este uniform mărginit, deoarece din ecuația integrală

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f_n[t, \varphi_n(t)]\, dt$$

verificată în V_{x_0} de φ_n, se deduce imediat

$$|\varphi_n(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f_n[t, \varphi_n(t)] dt \right| \leqslant M(b - a)$$

și echicontinuu, în baza inegalităților

$$|\varphi_n(x_1) - \varphi(x_2)| = \left| \int_{x_0}^{x} f_n[t, \varphi_n(t)]\, dt - \int_{x_0}^{x_2} f_n[t, \varphi_n(t)]\, dt \right| =$$

$$= \left| \int_{x_1}^{x_2} f_n[t, \varphi_n(t)]\, dt \right|,$$

de unde se deduce $|\varphi_n(x_1) - \varphi_n(x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2| < \varepsilon$, dacă $|x_1 - x_2| < \delta$, $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$. Așadar, conform celor afirmate, se poate

găsi subșirul $(\varphi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ al șirului $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încît $\varphi_{n_k}\to\varphi$, φ fiind evident o funcție continuă în V_{x_0} iar în baza uniform convergenței acestui subșir, prin trecere la limită în ecuația integrală verificată de φ_{n_k} (făcînd $k\to\infty$), funcția limită va verifica ecuația integrală

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t,\varphi(t)]\,dt$$

și deci această funcție va fi o soluție a problemei Cauchy date pentru ecuația $y'=f(x,y)$.

Din demonstrație, este evident că unicitatea acestei soluții nu este asigurată (putînd exista diverse subșiruri ale șirului $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ care să aibă limite diferite).

4.5. Existența soluțiilor pentru ecuații diferențiale cu puncte singulare

În cele ce vor urma vor fi luate în considerație numai ecuațiile diferențiale liniare și omogene de ordinul al doilea de forma

$$xy''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{4.9}$$

sau acelea care se reduc la ecuații de forma (4.9).

Teorema 4.4. *Dacă în ecuația* (4.9) p *și* q *sînt funcții continue pentru* $|x|<\alpha$, $\alpha>0$, *cu valori complexe*

$$-p(x)=p_0+xp_1(x),\quad -q(x)=q_0+xq_1(x),$$

atunci această ecuație va admite o soluție de clasă C^2 *în vecinătatea originii* $(y:[-x_1,x_1]\to\mathbb{C})$.

⌜ Notînd $y''=z$, deci $y=\int_0^x (x-t)z(t)\,dt+a+bx$, unde $a=y(0)$, $b=y'(0)$, prin înlocuire în (4.9) se va obține ecuația integrală

$$z(x)=\frac{p_0}{x}\int_0^x z(t)\,dt+\int_0^x k(x,t)\,z(t)\,dt+f(x)+\frac{1}{x}(bp_0+aq_0) \tag{4.10}$$

cu notațiile $k(x,t)=p_1(x)+[q_0+xq_1(x)]\dfrac{x-t}{t}$, $f(x)=bp_1(x)+aq_1(x)+bxq_1(x)+bq_0$; dacă se determină $b\in\mathbb{C}$ astfel încît $bp_0+aq_0=0$ (deci $b=-a\dfrac{q_0}{p_0}$ dacă $p_0\neq 0$, iar dacă $p_0=0$ se poate considera $a=0$ și atunci b este arbitrar), din (4.10) rezultă că teorema va fi demonstrată dacă se arată că aplicația T definită prin

$$(Tz)(x)=\frac{p_0}{x}\int_0^x z(t)\,dt+\int_0^x k(x,t)\,z(t)\,dt+f(x), \tag{4.11}$$

$$T: C([-\alpha,+\alpha])\to C([-\alpha,+\alpha])$$

admite un punct fix în $C([-x_1,+x_1])$ cu $x_1>0$, $x_1\leqslant\alpha$.

Or, dacă $\|h\|=\max\limits_{-x_1\leqslant x\leqslant x_1}|h(x)|$, pentru h funcție continuă cînd $|x|<\alpha$, $x_1<\alpha$, din (4.11) rezultă $d(Tz_1,Tz_2)=\|Tz_1-Tz_2\|\leqslant(|p_0|+Mx_1)\|z_1-z_2\|=(|p_0|+Mx_1)\,d(z_1,z_2)$ (cu z_1, z_2 funcții continue în vecinătatea originii); dacă $|p_1|<1$, atunci se poate alege x_1 suficient de mic astfel încît $|p_0|+Mx_1<1$ și aplicația T va fi o contracție, ceea ce va antrena existența unei soluții $z\in C([-x_1,x_1])$ care, evident, va verifica (4.10) iar $y=\int_0^x (x-t)\,z(t)\,dt+a+bx\in C^2([-x_1,x_1])$ va verifica ecuația (4.9).

Dacă însă $|p_1|\geqslant 1$, se scrie ecuația (4.9) sub forma $Ly=p_0''y'$, unde $Ly=xy''-[p_0'+xp_1(x)]y'+q(x)y$ cu $p_0=p_0'+p_0''$ și $|p_0'|<1$; în baza primei părți a demonstrației ecuația $Ly=0$ va admite o soluție ordinară y_1 (cu a și b determinați convenabil) și punînd $y=y_1u$ în ecuația $Ly=p_0''y'$, pentru noua funcție necunoscută u se obține o ecuație diferențială liniară de ordinul întîi (în u'), care, integrată, conduce la egalitatea (în ipoteza $p_0''y'$ cunoscut)

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_1(x)\int_0^x g(t)\,t^{p_0'}\,dt+$$

$$+p_0''y_1(x)\int_0^x g(t)\,t^{p_0'}\left[\int_0^t\frac{y'(\tau)\tau^{-p_0'}}{g(\tau)}\,d\tau\right]dt$$

cu $g(x)=\dfrac{1}{y_1^2(x)}\exp\left[\int_0^x p_1(t)\,dt\right]$ și C_1, C_2 constante de integrare.

Notînd cu T_1y membrul drept al egalității, este ușor de arătat că T_1 aplică spațiul funcțiilor de clasă $C^{-1}([-x_1, x_1])$ în el însuși iar

$$d(T_1y, T_1y^*) = \sup|T_1y - T_1y^*| \leqslant M_1x_1^2\|y - y^*\|_1,$$

cu

$$\|y\|_1 = \max\{\sup_{-x_1\leqslant x\leqslant x_1}|y|, \sup_{-x_1\leqslant x\leqslant x_1}|y'|\},$$

$$d((T_1y)', (T_1y^*)') =$$

$$= \sup|(T_1y)' - (T_1y^*)'| \leqslant M_2x_1\|y - y^*\|_1,$$

ceea ce face, pentru x_1 suficient de mic, ca aplicația T_1 să fie o contracție a spațiului $C^1([-x_1, x_1])$ în el însuși.

În consecință, va exista un punct fix $y \in C^1([-x_1, x_1])$ pentru T_1 și se verifică imediat că acest punct fix este o funcție de clasă C^2, soluție ordinară a ecuației în cauză□.

Din demonstrație rezultă că în situația în care $x = 0$ este un punct singular al ecuației (4.9), există o soluție ordinară a acesteia, care ia o valoare arbitrară pentru $x = 0$ (dacă $p_0 \neq 0$) dar derivata y' în origine nu mai poate fi arbitrară.

La ecuațiile de forma (4.9) se pot aduce și ecuațiile de forma

$$x^2y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = 0, \tag{4.12}$$

$a_1, a_2 : [-\delta, +\delta] \to \mathbf{C}$, $a_j(x) = a_j(0) + xb_j(x)$, $j = 1, 2$,

cu ajutorul substituției

$$y = x^\rho z, \tag{4.13}$$

$\rho \in \mathbf{C}$, soluție a ecuației

$$\rho(\rho - 1) + a_1(0)\rho + a_2(0) = 0.$$

Într-adevăr, în aceste ipoteze, se obține ecuația diferențială

$$xz'' + [2\rho + a_1(0) + xb_1(x)]\,z' + [\rho b_1(x) + b_2(x)]\,z = 0,$$

care este evident de tipul ecuației (4.9). Rezultă, în baza teoremei 4.4, că pentru ecuația (4.12) se pot determina soluții de forma $x^{\rho_1}z_1(x)$ sau $x^{\rho_2}z_2(x)$, unde ρ_1 și ρ_2 verifică ecuația algebrică de gradul doi

$$\rho(\rho - 1) + a_1(0)\rho + a_2(0) = 0, \tag{4.14}$$

numită *ecuația determinantă* sau *ecuația indicială* a ecuației (4.12).

Toate aceste considerații se pot extinde și la cazul ecuațiilor diferențiale liniare de ordin oarecare, de forma

$$x^ny^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

sau pentru sisteme diferențiale liniare de forma $x\mathbf{y} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}$, unde $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ iar $\mathbf{A}$ este o matrice continuă în vecinătatea lui $x = 0$.

De asemenea este evident că dacă p și q din ecuația (4.9) sînt funcții olomorfe pentru $|x| < \alpha$, atunci ecuația va admite o soluție olomorfă în vecinătatea originii iar $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$.

CAPITOLUL 5

Dependența soluțiilor ecuațiilor diferențiale de condițiile inițiale și de parametri

Pentru simplitatea expunerii nu vom lua în considerație decît cazul unei ecuații diferențiale scalare de forma

$$y' = f(x, y) \tag{5.1}$$

cu mențiunea că toate rezultatele obținute în acest caz se pot generaliza și la alte situații.

Teorema 5.1. *Dacă $f \in C^0(D_2)$ și este lipschitziană în y, atunci soluția ecuației* (5.1) *pentru x și x_0 fixați, depinde continuu de y_0 [din condiția inițială $y(x_0) = y_0$].*

⌜ Alături de condiția $y(x_0) = y_0$, vom atașa ecuației (5.1) condiția inițială $y(x_0) = z_0$, astfel încît $|y_0 - z_0| = d(y_0, z_0) < \varepsilon$; conform cu modelul expus la demonstrația teoremei 4.1, cele două soluții, pe care le vom nota prin $y = y(x; x_0, y_0)$ și $z = z(x; x_0, z_0)$, vor fi punctele fixe ale contracțiilor

$$(Ay)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]\,dt,$$

respectiv

$$(Bz)(x) = z_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, z(t)]\,dt.$$

Deoarece

$$d(Ay, By) = \max_{x \in \bar{J}} |(Ay)(x) - (By)(x)| = |y_0 - z_0| = d(y_0, z_0)$$

și deoarece prin ipoteză $d(y_0, z_0) < \varepsilon$, aplicațiile A și B sînt ε-vecine, în baza teoremei 3.3 punctele fixe y și z vor verifica inegalitatea

$$d(y, z) = \max_{x \in \bar{J}} |y(x; x_0, y_0) - z(x; x_0, z_0)| < \frac{\varepsilon}{1 - q}, \quad q = Lh. \; ⌟$$

Prin urmare, teorema 5.1 afirmă că dacă diferența oricăror două soluții ale ecuației (5.1) este inferioară lui ε pentru $x = x_0$, atunci această diferență rămîne inferioară lui $\dfrac{\varepsilon}{1 - q}$, $q = Lh$, pentru orice $x \in \bar{J}$, adică pentru orice punct din intervalul $|x - x_0| \leqslant h$.

Repetînd acest raționament, dar cu $x_0 \pm h$ în loc de x_0 (dacă soluția se poate prelungi în afara intervalului $\bar{J}$), deoarece avem $d[y(x_0 + h), z(x_0 + h)] < \dfrac{\varepsilon}{1 - q}$, soluțiile ecuației (5.1) corespunzătoare condițiilor inițiale y_1 și z_1, cu $y_1 = y(x_0 + h)$, $z_1 = z(x_0 + h)$, vor verifica inegalitatea $d(y, z) < \dfrac{\varepsilon}{(1 - q)^2}$ etc.

Vom considera acum, în locul ecuației (5.1), ecuația diferențială

$$y' = f(x, y, \lambda), \tag{5.2}$$

unde λ este un parametru (real sau complex); evident, soluțiile ecuației (5.2) vor depinde de acest parametru și rezultatele care vor fi demonstrate vor preciza această dependență. Vom atașa ecuației (5.2) condiția inițială

$$y(x_0) = y_0, \tag{5.3}$$

ceea ce face ca problema (5.2), (5.3) să fie echivalentă cu ecuația integrală

$$y(x, \lambda) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y(t, \lambda)]\,dt, \tag{5.4}$$

ceea ce conduce la utilizarea aplicației

$$A_\lambda y_\lambda = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y_\lambda(t), \lambda]\,dt. \tag{5.5}$$

Teorema 5.2. *Dacă* $f: \bar{J}_h \times Y_r \times \Lambda_\rho \to Y$, *unde* $\bar{J}_h$ *este intervalul* $|x - x_0| \leqslant h$, Y_r *este sfera de rază* r *cu centrul în* y_0 *al mulțimii funcțiilor continue* Y *definite pe* $\bar{J}_h$ *cu valori reale (complexe) iar* Λ_ρ *este sfera de rază* ρ *cu centrul în* λ_0 *din* $\mathbb{R}(\mathbb{C})$, *atunci dacă* f *este continuă în toate argumentele și lipschitziană în* y, *soluția* $y_\lambda(x) = y(x, \lambda)$ *a problemei* (5.2), (5.3) *este continuă în raport cu parametrul* λ.

⌜ Fie $\lambda \in \Lambda_\rho$; atunci, deoarece $|f(x, y, \lambda) - f(x, y, \lambda_0)| < \varepsilon$, dacă $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, din (5.5) va rezulta

$$d(A_\lambda, y, A_{\lambda_0} y) \leqslant \max \left| \int_{x_0}^{x} |f[t, y_\lambda(t), \lambda] - f[t, y_{\lambda_0}(t), \lambda_0]| \, dt \right| < \varepsilon h,$$

ceea ce face ca punctele fixe ale aplicațiilor A_λ și A_λ, care sînt exact soluțiile y_λ și y_{λ_0}, să verifice (în baza teoremei 3.3) inegalitatea

$$d(y_\lambda, y_{\lambda_0}) = \max_{x \in \bar{J}} |y_\lambda(x) - y_{\lambda_0}(x)| < \frac{\varepsilon h}{1 - q}$$

și deci $y_\lambda(x) \to y_{\lambda 0}(x)$, dacă $\lambda \to \lambda_0$. ⌟

Teorema 5.2 permite o generalizare imediată în sensul următor:

Teorema 5.3. *În ipotezele teoremei* 5.2, *ecuația diferențială* (5.1) *admite o singură soluție continuă în raport cu parametrul* λ *care verifică condiția inițială* $y(x_0) = g(\lambda)$, *unde* $g: \Lambda_\rho \to Y$ *este continuă în* Λ_ρ.

⌜ Se utilizează, ca de obicei, aplicația $A_\lambda: Y_r \to Y$ definită prin

$$(A_\lambda y)(x) = g(\lambda) + \int_{x_0}^{x} f[t, y(t), \lambda] dt$$

și deoarece

$$d(A_\lambda y, y_0) = \max_{x \in \bar{J}_h} |(A_\lambda y)(x) - y_0| \leqslant \|A_\lambda y - g(\lambda)\| +$$

$$+ \|g(\lambda) - y_0\| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f[t, y(t), \lambda]| dt \right| + \|g(\lambda) - y_0\| \leqslant$$

$$\leqslant mh + \|g(\lambda) - y_0\|,$$

luînd $mh < \frac{r}{2}$, $\|g(\lambda) - y_0\| < \frac{r}{2}$

pentru $\lambda \in \Lambda_{\rho_1}$, $\rho_1 \leqslant \rho$, avem $d(A_\lambda y, y_0) < r$, ceea ce face ca $A_\lambda Y_r \subset Y_r$; apoi deoarece

$$d(A_\lambda y_1, A_\lambda y_2) \leqslant L\|y_1 - y_2\|h = qd(y_1, y_2),$$

unde $Lh = q < 1$, A_λ va fi o contracție pentru orice λ fixat din Λ_{ρ_1} dacă h și r verifică inegalitatea $2mh \leqslant r$.

Cum aplicațiile A_λ și A_{λ_0} sînt ε-vecine, deoarece

$$d(A_\lambda y, A_{\lambda_0} y) \leqslant \|g(\lambda) - g(\lambda_0)\| + \left| \int_{x_0}^{x} f[t, y(t), \lambda] - \right.$$

$$\left. - f[t, y(t), \lambda_0]| \, dt \right| \leqslant \varepsilon_1 + h\varepsilon_1 = \varepsilon,$$

dacă $\|g(\lambda) - g(\lambda_0)\| < \varepsilon_1$ și $\|f(t, y(t), \lambda) - f(t, y(t), \lambda_0)\| < \varepsilon_1$ va rezulta $d(y_\lambda, y_{\lambda_0}) \leqslant \frac{\varepsilon}{1 - q}$.

În sfîrșit, un alt rezultat important pentru teoria ecuațiilor diferențiale se referă la posibilitatea derivării soluției în raport cu parametrul λ.

Astfel, dacă $y_\lambda(x) = y(x, \lambda)$ verifică atît ecuația diferențială $y' = f(x, y, \lambda)$ și condiția inițială $y(x_0) = g(\lambda)$, atunci dacă f este de clasă C^1 și g este derivabilă în raport cu λ și soluția $y_\lambda(x)$ va fi derivabilă în raport cu parametrul λ. Într-adevăr, dacă f este de clasă C^1 în toate argumentele sale iar g este de clasă C^1 în raport cu λ, atunci operatorul A_λ definit anterior va fi și el derivabil în raport cu λ (aplicînd teoremele cunoscute de derivabilitate a integralelor în raport cu parametri) și dacă notăm $B_\lambda y = \frac{\partial (A_\lambda y)}{\partial \lambda}$, vom avea

$$(B_\lambda y)(x) = g'(\lambda) + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f[t, y(t), \lambda]}{\partial \lambda} dt,$$

iar B_λ va fi iarăși o contracție, deoarece $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ este mărginit; în plus, vom putea să presupunem $\|B_\lambda y\| \leqslant q < 1$ dacă $g(\lambda) = y_0$.

Faptul că y va fi o funcție derivabilă de λ este o consecință directă a teoremei funcțiilor implicite; într-adevăr, fie $F(\lambda, z) = z - A_\lambda z$,

definită pentru $z \in B_r(y)$ și $\lambda \in B_\rho(\lambda_0)$, unde $y = y(x, \lambda)$ este soluția ecuației $y' = f(x, y, \lambda)$ care verifică $y(x_0) = y_0$. Pentru $\lambda_1 \in B_\rho(\lambda_0)$ avem $F[\lambda_1, y(x, \lambda_1)] = y(x, \lambda_1) - A_{\lambda_1}(x, \lambda_1) = 0$ iar

$$\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{z = y(x, \lambda_1)} = 1 - \left.\frac{\partial A_\lambda z}{\partial z}\right|_{z = y(x, \lambda_1)} \neq 0$$

deoarece $\left\| \frac{\partial A_\lambda}{\partial z} \right\|$ poate fi presupus subunitar; în baza teoremei funcțiilor implicite există $z = z(\lambda)$, $\lambda \in B_{\rho_1}(\lambda_0)$, $\rho_1 \leqslant \rho$, de clasă C^1 astfel încît $F[\lambda, z(\lambda_1)] = 0$, dacă $\lambda \in B_{\rho_1}(\lambda_0)$. Cum $F[\lambda, z(\lambda)] = 0$ este chiar ecuația integrală $z = A_\lambda z$ care admite ca singură soluție $y = y(x, \lambda)$, va rezulta $y(x, \lambda) = z(\lambda)$ și deci y este diferențiabilă în raport cu λ (derivata în raport cu λ fiind continuă).

Deoarece avem $y'(x, \lambda) = f[x, y(x, \lambda), \lambda]$, notînd $\frac{\partial y}{\partial \lambda} = z(x, \lambda)$, prin derivare în raport cu λ se obține ecuația diferențială liniară în z

$$z'(x, \lambda) = \frac{\partial f[x, y(x, \lambda), \lambda]}{\partial y} z(x, \lambda) + \frac{\partial f[x, y(x, \lambda), \lambda]}{\partial \lambda}, \qquad (5.6)$$

numită *ecuație cu variații* atașată ecuației $y' = f(x, y, \lambda)$.

Dacă în plus soluția y verifică $y(x_0) = g(\lambda)$, atunci ecuației (5.6) i se va atașa condiția inițială $z(x_0, \lambda) = g'(\lambda)$.

Dacă în particular vom presupune $g(\lambda) = \lambda$ și $f(x, y, \lambda) = f(x, y)$, în această situație este vorba despre derivabilitatea soluției în raport cu condiți inițială: va rezulta că soluția corespunzătoare problemei $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = \lambda$ este derivabilă în raport cu λ iar ecuații cu variații verificată de soluția $y = y(x, \lambda)$ a acestei probleme va fi

$$z'(x, \lambda) = \frac{\partial f[x, y(x, \lambda)]}{\partial y} z(x, \lambda), \qquad z'(x, \lambda) = \frac{\mathrm{d}z(x, \lambda)}{\mathrm{d}x}.$$

În plus, se va verifica condiția inițială $z(x_0, \lambda) = 1$; evident, soluția va fi de forma $z(x, \lambda) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{\partial f[t, y(t, \lambda)]}{\partial t} \mathrm{d}y\right)$.

Dacă însă $y(x_0) = y_0$ și y_0 nu depinde de λ, atunci funcția $z(x, \lambda) = \frac{\partial y(x, \lambda)}{\partial \lambda}$ va verifica ecuația cu variații

$$z'(x, \lambda) = \frac{\partial f[x, y(x, \lambda), \lambda]}{\partial y} z(x, \lambda) + \frac{\partial f[x, y(x, \lambda), \lambda]}{\partial \lambda}$$

și condiția inițială $z(x_0, \lambda) = 0$.

În multe aplicații este important de determinat clasa de derivabilitate a soluției ecuației (5.1) dacă $f \in C^m(D_2)$; se poate demonstra

Teorema 5.4. *Dacă* $f \in C^m(D_2)$, *atunci* $y \in C^{m+1}(J)$, *unde* $\bar{J} = \{x \mid |x - x_0| \leqslant h\}$, $m \in \mathbb{Z}_+$.

Demonstrația rezultă imediat prin inducție: dacă $m = 0$, atunci $y' \in C^1(J)$; presupunînd $y \in C^k(J)$ dacă $f \in C^{(k-1)}(D_2)$, deoarece se verifică relația $y'(x) = f[x, y(x)]$, $x \in J$; presupunînd $y \in C^k(J)$ și $f \in C^k(D_2)$, în baza teoremei funcțiilor compuse, avem $f(x, y(x)) \in C^k(D_2)$, deci $y' \in C^k(J)$, ceea ce înseamnă $y \in C^{k+1}(J)$. ⌋

Dacă $f(x, y) \in C^\infty(D_2)$, atunci teorema 5.4 ne asigură că soluția ecuației (5.1) care verifică (5.3) va fi de asemenea indefinit derivabilă pe J.

Derivatele succesive ale lui y (dacă $f \in C^k$) se pot obține imediat:

$$y''(x) = \frac{\partial f(x, y(x))}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y(x))}{\partial y} y'(x) =$$

$$= \frac{\partial f(x, y(x))}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y(x))}{\partial y} f(x, y(x)),$$

$$y'''(x) = \frac{\partial^2 f(x, y(x))}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f(x, y(x))}{\partial x \partial y} f(x, y(x)) +$$

$$+ \frac{\partial^2 f(x, y(x))}{\partial y^2} f^2(x, y(x)) + \frac{\partial f(x, y(x))}{\partial y} \frac{\partial f(x, y(x))}{\partial x} +$$

$$+ \left[\frac{\partial f(x, y(x))}{\partial y}\right]^2 f(x, y(x)) \text{ etc.}$$

CAPITOLUL 6

Metode aproximative şi metode numerice de integrare a ecuaţiilor diferenţiale

6.1. Metode aproximative de integrare a ecuaţiilor diferenţiale

Dîndu-se o ecuaţie diferenţială oarecare, este evident faptul că nu întotdeauna se poate găsi forma explicită a soluţiilor ei (care verifică sau nu anumite condiţii suplimentare); prin consideraţiile anterioare s-a arătat că în condiţii suficient de generale, cel puţin problema Cauchy admite o singură soluţie, dar nu s-a indicat nici o metodă de aflare efectivă a soluţiei. De fapt, o asemenea metodă nici nu poate exista şi de aceea se impune prezentarea unor metode de determinare aproximativă a acestor soluţii. Aceste metode sînt bazate pe considerentele teoretice din capitolele 4 şi 5.

6.1.1. Metoda aproximaţiilor succesive (metoda iteraţiilor)

În cazul ecuaţiei diferenţiale de ordinul întîi, pentru care se cunoaşte condiţia iniţială, adică în cazul problemei

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{6.1}$$

pentru găsirea aproximativă a soluţiilor se poate utiliza ecuaţia integrală echivalentă cu (6.1) şi anume

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]\,dt \tag{6.1'}$$

(se presupun îndeplinite condiţiile din capitolul 4 pentru f), iar soluţia y corespunzătoare poate fi aproximată printr-o iterată oarecare y_n, obţinută prin metoda aproximaţiilor succesive.

Aşadar, presupunînd

$$y \approx y_n,\ y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y_{n-1}(t)]\,dt,\ n \in \mathbb{N},$$

cu $y_0(x) = y_0$ (y_0 fiind dat de condiţia iniţială), $y_n = y_n(x)$, $|x - x_0| < r$ va fi o soluţie aproximativă pentru (6.1).

Evident, y_n poate fi determinat chiar dacă f este presupusă numai integrabilă în D_2, dar dacă f este continuă şi lipschitziană în y, atunci în mod sigur $y_n \to y$ (y fiind soluţia căutată, convergenţa este uniformă) şi se poate determina şi eroarea care apare prin înlocuirea lui y prin y_n; într-adevăr, utilizînd (3.6), avem

$$d(y, y_n) \leqslant \frac{q^n}{1 - q}\, d(y_0, y_1),$$

q fiind constanta de contracţie.

Exemple

1. Fie ecuaţia Riccati $y' = x^2 + y^2$ cu condiţia $y(x_0) = y_0$; pentru această ecuaţie nu se poate găsi o soluţie particulară şi de aceea nu poate fi integrată prin metoda obişnuită.

Deoarece $f(x, y) = x^2 + y^2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, x_0 şi y_0 pot fi orice numere reale. Luînd pentru uşurinţă $x_0 = y_0 = 0$, avem

$$y_0(x) = y_0 = 0,$$

$$y_1(x) = \int_0^x (t^2 + 0^2)\,dt = \frac{x^3}{3},$$

$$y_2(x) = \int_0^x \left(t^2 + \frac{t^6}{9}\right) dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63},$$

$$y_3(x) = \int_0^x [t^2 + y_2(t)^2]\,dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2\,079} + \frac{x^{15}}{59\,535} \quad \text{etc.}$$

2. Fie ecuația diferențială de ordinul al doilea $y'' - xy = 6x$, căreia i se atașează condițiile inițiale $y(0) = y'(0) = 0$.

Metoda iterațiilor se poate aplica și aici, înlocuind problema Cauchy dată pentru această ecuație prin ecuația integrală

$$y(x) = x^3 + \int_0^x (x - t)\, ty(t)\, dt.$$

Se verifică ușor că $y'' = xy + 6x$ și aplicînd procedeul anterior, va rezulta

$$y_0(x) = 0,$$

$$y_1(x) = x^3,$$

$$y_2(x) = x^3 + \int_0^x (x - t)t^4 dt = x^3 + \frac{x^6}{12} \text{ etc.}$$

6.1.2. *Metoda parametrului mic* se bazează pe dependența continuă a soluției de parametrii care apar în ecuație sau în condițiile inițiale.

Astfel, dacă se consideră ecuația (și problema Cauchy corespunzătoare)

$$y' = f(x, y, \lambda), \qquad y(x_0) = g(\lambda),$$

presupunînd f și g de o clasă oarecare, se poate presupune și soluția corespunzătoare de aceeași clasă în raport cu parametrul λ; dacă în plus se cunoaște soluția pentru $\lambda = \lambda_0$ (aceasta fiind așa-numita *soluție neperturbată*), scriind dezvoltarea Taylor a soluției pentru $\lambda \neq \lambda_0$, $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, sub forma

$$y(x, \lambda) = y_0(x) + (\lambda - \lambda_0)y_1(x) + \ldots + (\lambda - \lambda_0)^k y_k(x) + \ldots$$

după determinarea succesivă a funcțiilor $y_0, \ldots, y_k, \ldots$, prin utilizarea atît a ecuației cît și a condiției inițiale, se va obține o soluție aproximativă (numită *soluție perturbată*) a problemei date, valabilă pentru $|\lambda - \lambda_0|$ mic.

Exemple

3. Problema Cauchy $y(0) = 0$ pentru ecuația $y' = \dfrac{3x^2}{1 + 0{,}01\, xy}$ nu este o problemă în care apar parametri; avînd însă în vedere că la numitor intervine numărul

0,01, îl vom înlocui cu λ și astfel se va lua în considerație problema Cauchy $y(0) = 0$ pentru ecuația cu parametru $y' = \dfrac{3x^2}{1 + \lambda xy}$. Soluția căutată se va obține din $y(x, \lambda)$ pentru $\lambda = 0{,}01$.

Pentru $\lambda = 0$, ecuația $y' = 3x^2$ admite o singură soluție care verifică $y(0) = 0$ și anume $y_0(x) = x^3$ (aceasta este deci soluția neperturbată).

Scriind

$$y(x, \lambda) = \sum_{k \geqslant 0} \lambda^k y_k(x) = y_0(x) + \sum_{k \geqslant 1} \lambda^k y_k(x),$$

$f(x, y, \lambda)$ fiind o funcție analitică în λ, iar $y_0(x) = x^3$ și $y_1, y_2, \ldots$ deocamdată necunoscuți, prin înlocuire în ecuația dată, scrisă însă sub forma $y'(1 + \lambda xy) = 3x^2$, se obține egalitatea

$$(3x^2 + \lambda y_1' + \lambda^2 y_2' + \ldots)(1 + \lambda x^4 + \lambda^2 x y_1 + \lambda^3 x y_2 + \ldots) = 3x^2,$$

care poate fi considerată ca o identitate în λ, ceea ce conduce la determinarea succesivă a funcțiilor $y_1, y_2, \ldots$

Se vor obține ecuațiile

$$y_1' + 3x^7 = 0, \quad y_2' + x^4 y_1' + 3x^3 y_1 = 0, \quad y_3' + x^4 y_2' + x y_1 y_1' + 3x^3 y_2 = 0, \ldots$$

(prin egalarea cu zero a coeficienților puterilor lui λ după efectuarea produsului) la care trebuie atașate condițiile care rezultă din condiția inițială; or $y(0) = 0$ va însemna

$$\lambda y_1(0) + \lambda^2 y_2(0) + \lambda^3 y_3(0) + \ldots = 0,$$

deci $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 0$, $y_3(0) = 0, \ldots$

Se deduce succesiv

$$y_1(x) = -\frac{3}{8} x^8,$$

$$y_2(x) = \frac{1}{4} x^{12} + \frac{9}{104} x^{13}, \ldots$$

și deci

$$y(x, \lambda) = x^3 - \frac{3}{8} \lambda x^8 + \left(\frac{1}{4} x^{12} + \frac{9}{104} x^{13} \right) \lambda^2 + \ldots$$

iar o soluție aproximativă a problemei de la care s-a plecat va fi

$$y(x) = y(x, 0{,}01) = x^3 - 0{,}00375x^8 + 0{,}0000025x^{12} + 8{,}65 \cdot 10^{-6} x^{13} + \ldots$$

4. Fie ecuația diferențială

$$y' = \cos(xy) - 1$$

a cărei soluție să presupunem că verifică condiția inițială $y(0) = \lambda$ (deci parametrul va apărea la condiția inițială); presupunînd $|\lambda|$ mic pentru $\lambda = 0$, soluția ecuației va fi evident $y = 0$ și atunci se poate căuta soluția y de forma

$$y(x, \lambda) = y_0(x) + \lambda y_1(x) + \lambda^2 y_2(x) + \ldots = \lambda y_1(x) + \lambda^2 y_2(x) + \ldots$$

Scriind ecuația sub forma

$$y' = -\frac{x^2}{2} y^2 + \frac{x^4}{24} y^4 + \ldots,$$

prin înlocuirea lui y se va obține o identitate în λ:

$$\lambda y_1' + \lambda^2 y_2' + \lambda^3 y_3' + \ldots = -\frac{x^2}{2} (\lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \ldots)^2 +$$

$$+ \frac{x^4}{24} (\lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \ldots)^4 + \ldots$$

din care vor rezulta ecuațiile diferențiale (iarăși egalînd coeficienții aceloraşi puteri ale lui λ):

$$y_1'(x) = 0, \quad y_2' = -\frac{x^2}{2} y_1^2, \quad y_3' = -x^2 y_1 y_2, \ldots$$

cărora li se atașează succesiv condițiile inițiale $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$, $y_3(0) = 0, \ldots$ [deduse din $y(0, \lambda) = \lambda = \lambda y_1(0) + \lambda^2 y_2(0) + \ldots$].

Prin integrare se obțin funcțiile

$$y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = -\frac{x^3}{6}, \quad y_3(x) = \frac{x^6}{36}, \ldots$$

ceea ce conduce la soluția aproximativă $y(x, \lambda) = \lambda - \frac{x^3}{6} \lambda^2 + \frac{x^6}{36} \lambda^3 + \ldots$

6.1.3. *Metoda coeficienților nedeterminați* poate fi utilizată în cazul ecuației $y' = f(x, y)$ dacă f este dezvoltabilă în serie de puteri în vecinătatea punctului (x_0, y_0), definit prin $y(x_0) = y_0$.

Deoarece se știe că dacă f este funcție analitică în vecinătatea lui (x_0, y_0), atunci soluția este analitică în vecinătatea lui x_0 și poate fi considerată de forma

$$y(x) = y_0 + y_1(x - x_0) + y_2(x - x_0)^2 + \ldots =$$

$$= y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n (x - x_0)^n.$$

Deoarece $f(x, y) = \sum_{j,k=0}^{\infty} f_{jk} (x - x_0)^j (y - y_0)^k$, prin înlocuire în ecuația $y' = f(x, y)$, se obține egalitatea

$$\sum_{n=1}^{\infty} n y_n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{j,k=0}^{\infty} f_{jk} (x - x_0)^j \left[\sum_{n=0}^{\infty} y_n (x - x_0)^n \right]^k,$$

din care, prin identificarea coeficienților aceloraşi puteri pentru $x - x_0$ se va obține un sistem de ecuații algebrice pentru $y_1, y_2, \ldots$

Primele ecuații ale acestui sistem vor fi $y_1 = f_{00}$, $y_2 = \frac{1}{2} (f_{01} f_{00} + f_{10})$; la acelaşi rezultat se poate ajunge dacă se înlocuiesc y_1, $y_2, \ldots$ prin valorile lui f și ale derivatelor sale, ținînd seama atît de ecuația în cauză cît și de considerațiile făcute la demonstrația teoremei 5.4; astfel, deoarece

$$f_1 = y'(x_0), \quad f_2 = \frac{1}{2} y''(x_0), \quad f_3 = \frac{1}{6} y'''(x_0) \text{ etc.}$$

va rezulta

$$f_1 = f(x_0, y_0),$$

$$f_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + f(x_0, y_0) \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right],$$

$$f_3 = \frac{1}{6} \left\{ \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} f(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} f^2(x_0, y_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \left[\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right]^2 f(x_0, y_0) \right\} \text{ etc.}$$

Evident, metoda poate fi aplicată și dacă $f \in C^k$, dar atunci, cum

$y \in C^{k+1}$ (vezi teorema (5.4)), va trebui să scriem

$$y(x) \approx \sum_{j=0}^{k+1} f_j (x - x_0)^j ;$$

de asemenea această metodă este aplicabilă la ecuaţiile diferenţiale liniare (vezi capitolele 11, 12 şi 13).

Exemple

5. Fie ecuaţia $y'' - xy = 0$ şi condiţiile iniţiale $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. Soluţia se va căuta sub forma

$$y(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} y_n x^n,$$

coeficienţii putîndu-se determina fie prin înlocuirea lui y în ecuaţie şi egalînd cu zero coeficienţii aceloraşi puteri ale lui x, fie observînd că

$$y''(0) = (xy)(0) = 0,$$

.....

$$y'''(0) = (xy)'(0) = y'(0) = 1,$$

$$y^{(n+2)}(0) = (xy)^{n}(0) = [xy^{(n)} + ny^{(n-1)}](0) = ny^{(n-1)}(0).$$

Deci

$$y(x) = 1 + x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \dots$$

6. Fie ecuaţia Riccati $y' = x^2 + y^3$, condiţia iniţială fiind $y(0) = 1$. Atunci

$$y_0 = 1,$$

$$y_1 = y'(0) = y(0)^3 = 1,$$

$$y_2 = \frac{1}{2}y''(0) = \frac{1}{2}(x^2 + y^3)'(0) = \frac{1}{2}(2x + 3y^2y')(0) = \frac{3}{2}y_0^2y'(0) = \frac{3}{2},$$

$$y_3 = \frac{1}{6}y'''(0) = \frac{1}{6}(x^2 + y^3)''(0) = \frac{7}{3} \text{ etc.}$$

şi deci $y(x) \approx 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{3}x^3$.

6.2. Metode numerice în teoria ecuaţiilor diferenţiale

6.2.1. Polinomul de interpolare Lagrange

Dacă $f : J \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$), atunci cunoscîndu-se valorile funcţiei f într-un număr oarecare de puncte din J, din punct de vedere practic este important să se construiască altă funcţie $g : J \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) astfel încît funcţiile f şi g să coincidă în aceste puncte. În această situaţie funcţia g va fi o funcţie de interpolare pentru f şi evident se caută ca g să aibă o formă cît mai simplă; cele mai utilizate funcţii de interpolare sînt polinoamele (algebrice sau trigonometrice) sau funcţiile raţionale.

Astfel, dacă se presupune $[a, b] \subset J$ iar $a \leqslant x_0 < x_1 < \dots < x_j < x_{j+1} < \dots < x_n \leqslant b$, atunci polinomul algebric de grad maxim n, notat $L = L(x)$, care are proprietatea că $L(x_j) = f_j$, $j = 0, 1, \dots, n$, unde $f_j = f(x_j)$, se numeşte *polinom de interpolare Lagrange* şi construcţia lui este imediată. Astfel, notînd prin L_j polinoamele particulare de grad n definite prin

$$L_j(x) = \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)} = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k},$$

$$j = 0, 1, \dots, n \qquad (6.2)$$

se verifică imediat egalităţile

$$L_j(x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 \text{ pentru } j = k, \\ 0 \text{ pentru } j \neq k, \end{cases} \qquad (6.2')$$

cu ajutorul cărora este uşor de constatat că polinomul de interpolare Lagrange va fi definit prin

$$L(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j L_j(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}. \qquad (6.3)$$

Într-adevăr, din (6.2') rezultă $L(x_k) = \sum_{j=0}^{n} f_j L_j(x)_k = \sum_{j=0}^{k} f_j \delta_{jk} = f_k$, $k = 0, 1, \dots, n$. Vom conveni să spunem că polinomul de interpolare Lagrange (6.3) corespunde tabelului următor:

$$\begin{array}{c|cccc} x & x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \hline f(x) & f_0 & f_1 & \dots & f_n \end{array} \qquad (6.4)$$

în care $x_0, x_1, \dots, x_n$ se numesc *nodurile interpolării*; aceste noduri pot fi echidistante sau nu. Dacă însă nodurile interpolării sînt echidistante, adică dacă $x_j = x_0 + jh$, $h = x_{j+1} - x_j$ se numește ***pasul interpolării***, atunci efectuînd schimbarea de variabilă $x = x_0 + th$, se observă că se obține nodul x_j pentru valoarea $t = j$ a noii variabile t iar deoarece $x - x_k = h(t - k)$ și $x_j - x_k = h(j - k)$, vom obține, ținînd seama de (6.2),

$$L_j(x)\big|_{x=x_0+th} = \varphi_j(t) = \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} \frac{t-k}{j-k}, \qquad (6.2'')$$

ceea ce face ca polinomul de interpolare (6.3) să se scrie și sub forma

$$L(x)\Big|_{x=x_0+th} = \sum_{j=0}^{n} f_j \varphi_j(t). \qquad (6.3')$$

Polinomul de interpolare Lagrange (6.3) este unic determinat, deoarece dacă L^* ar fi un alt polinom de interpolare, deci $L^*(x_j) = f_j$, $j = 0, 1, \dots, n$, atunci deoarece $L(x_j) = L^*(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, n$, cele două polinoame de grad cel mult n, avînd în comun $n + 1$ valori, vor fi identice.

Este ușor de verificat că polinomul (6.3) poate să aibă gradul inferior lui n; astfel, dacă se consideră tabelul de interpolare

$$\begin{array}{c|cccc} x & 1 & 3 & 4 & 7 \\ \hline f(x) & 2 & 6 & 8 & 14 \end{array}$$

atunci $P(x) = 2x$, deși $n = 3$.

Utilizînd polinomul particular de grad $n + 1$, definit prin

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j), \qquad (6.5)$$

atunci deoarece

$$\prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} (x - x_k) = \frac{\omega(x)}{x - x_j} \text{ și } \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} (x_j - x_k) = \frac{\omega(x)}{x - x_j}\Big|_{x=x_j} =$$

$$= \frac{\omega(x) - \omega(x_j)}{x - x_j}\Big|_{x=x_j} = \omega'(x_j),$$

din (6.2) rezultă $L_j(x) = \dfrac{\omega(x)}{(x - x_j)\,\omega'(x_j)}$ și deci polinomul de interpolare Lagrange se mai poate scrie și sub forma

$$L(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j \frac{\omega(x)}{(x - x_j)\omega'(x_j)} = \omega(x) \sum_{j=0}^{n} \frac{f_j}{(x - x)\omega'(x)}. \qquad (6.3'')$$

Cu aceste considerații rezultă posibilitatea aproximării în J a funcției f prin polinomul de interpolare Lagrange L, ceea ce înseamnă că vom presupune, prin definiție, $f(x) \approx L(x)$, $x \in J$, aproximarea fiind exactă dacă $x = x_j$, cînd $f(x_j) = L(x_j) = f_j$, $j = 0, 1, \dots, n$, numerele x_j și f_j fiind definite prin tabelul (6.4); dacă $x \neq x_j$, $j = 0, 1, \dots, n$, atunci este important de evaluat eroarea care apare prin înlocuirea lui $f(x)$ (= valoare exactă) prin $L(x)$ (= valoare aproximativă). Această eroare va fi nulă numai dacă f este un polinom de grad cel mult n.

Presupunînd $f \in C^{n+1}(\bar{J})$, cu ajutorul exercițiului 1, de la cap. 17, se obține egalitatea

$$f(x) = L(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} |\omega(x)|, \ \xi \in J, \qquad (6.6)$$

din care se obține imediat o evaluare pentru eroarea în cauză:

$$|f(x) - L(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|}{(n+1)!} |\omega(x)|, \quad \|f^{(n+1)}\| = \max_{x \in \bar{J}} |f^{(n+1)}(x)|. \qquad (6.6')$$

6.2.2. Formule de aproximare de tip Newton-Côtes

Formulele de aproximare numerică de tip Newton-Côtes apar în problemele de evaluare a integralelor definite $\int_a^b f(x)\,dx$, cînd se aproximează f printr-un polinom Lagrange.

Pentru aceasta, în intervalul de integrare $[a, b]$ se consideră nodurile echidistante $x_j = x_0 + jh$ cu $x_0 = a$ şi $h = \dfrac{b-a}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, şi se construieşte tabelul de aproximare (6.4) în care, evident, $f_j = f(x_j)$, $j = 0, 1, \ldots$ Utilizînd forma (6.3′) pentru polinomul de interpolare Lagrange, vom avea

$$\int_a^b L(x)dx = h\int_0^n L(x_0 + th)\,dt = h\sum_{j=0}^{n} f_j \int_0^n \varphi_j(t)\,dt = h\sum_{j=0}^{n} \alpha_j f_j \qquad (6.7)$$

cu notaţia

$$\alpha_j = \int_0^n \varphi_j(t)\,dt = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \int_0^n \frac{t-k}{j-k}\,dt. \qquad (6.7')$$

Prin definiţie, prin *formulă de tip Newton-Côtes* se va înţelege înlocuirea valorii integralei

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ prin } \int_a^b L(x)\,dx = h\sum_{j=0}^{n} \alpha_j f_j.$$

Numerele α_j date prin (6.7′) sînt evident numere raţionale şi au proprietatea $\sum_{j=0}^{n} \alpha_j = n$, deoarece dacă $f(x) = 1$, $x \in J$, din (6.7) se deduce $\int_a^b dx = b - a = \int_a^b L(x)dx = h\sum_{j=0}^{n} \alpha_j$, deoarece $f_j = f(x_j) = 1$, şi cum $b - a = h \cdot n$, se obţine egalitatea menţionată; notînd cu s numitorul comun al numerelor α_j, vom nota

$$\sigma_j = s \cdot \alpha_j,\ \sigma_j \in \mathbb{Z},\ j = 0, 1, \ldots, n, \qquad (6.7'')$$

şi atunci formulele de tip Newton-Côtes se vor scrie

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b L(x)\,dx = h\sum_{j=0}^{n} \alpha_j f_j = \frac{h}{s}\sum_{j=0}^{n} \sigma_j f_j = \frac{b-a}{ns}\sum_{j=0}^{n} \sigma_j f_j. \qquad (6.8)$$

Cu ajutorul exerciţiului 1, cap. 17, se poate obţine şi o evaluare a erorii care apare cînd se înlocuieşte $\int_a^b f(x)\,dx$ prin $\int_a^b L(x)dx$; vom avea

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b L(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |\varphi(x)|\,dx \leqslant \frac{\|f^{(n+1)}\|}{(n+1)!}(b-a)^{n+1},$$

dacă $f \in C^{n+1}(\bar{J})$ (aici $\varphi = f - L$). Vom prezenta acum tabelul cu formulele de tip Newton-Côtes pentru $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$:

n	σ_j								ns	Eroarea	Denumire
0				—					—	$\frac{1}{2}h^2\|f'\|$	Regula dreptunghiului
1	1	1							2	$\frac{1}{12}h^3\|f^{(2)}\|$	Regula trapezului
2	1	4	1						6	$\frac{1}{90}h^5\|f^{(4)}\|$	Regula lui Simpson
3	1	3	3	1					8	$\frac{3}{80}h^4\|f^{(4)}\|$	Regula $\frac{3}{8}$
4	7	32	12	32	7				90	$\frac{8}{945}h^7\|f^{(6)}\|$	Regula lui Milne
5	19	75	50	50	75	19			288	$\frac{275}{12\,096}h^7\|f^{(6)}\|$	—
6	41	216	27	272	27	216	41		840	$\frac{9}{1\,040}h^9\|f^{(8)}\|$	Regula lui Weddle

În tabelul următor se precizează modul de utilizare a acestui tabel :

n	h	$\int_a^b L(x)\mathrm{d}x$
0	$b-a$	$hf(a)$
1	$b-a$	$\frac{h}{2}[f(a)+f(b)]$
2	$\frac{b-a}{2}$	$\frac{h}{3}[f(a)+4f(a+h)+f(b)]$
3	$\frac{b-a}{3}$	$\frac{3h}{8}[f(a)+3f(a+h)+3f(b-h)+f(b)]$
4	$\frac{b-a}{4}$	$\frac{2h}{45}[7f(a)+32f(a+h)+12f(a+2h)+32f(b-h)+7f(b)]$
5	$\frac{b-a}{5}$	$\frac{288h}{5}[19f(a)+75f(a+h)+50f(a+2h)+50f(b-2h)+$ $+75f(b-h)+19f(b)]$
6	$\frac{b-a}{6}$	$\frac{h}{140}[41f(a)+216f(a+h)+27f(a+2h)+$ $+272f(a+3h)+27f(b-2h)+216f(b-h)+41f(b)]$

Să tratăm în amănunt cazurile $n=0$, 1 şi 2.

6.2.2.1. *Regula dreptunghiului.* Dacă $n=0$, polinomul de interpolare Lagrange are gradul zero şi deci considerînd un punct x_0 oarecare din intervalul $[a, b]$, vom avea $f(x) \approx f(x_0)$, $x \in [a, b]$, iar atunci $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^b f(x_0)\,\mathrm{d}x = f(x_0)\int_a^b \mathrm{d}x = (b-a)f(x_0)$ şi pentru $x_0 = a$ se va aplica expresia care figurează în tabelul al doilea. Pentru evaluarea erorii, vom putea scrie

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - f(a)(b-a)\right| = \left|\int_a^b [f(x)-f(a)]\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \|f'\|\int_a^b (x-a)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{(b-a)^2}{2}\|f'\|,$$

dacă se ţine seama şi de teorema creşterilor finite.

În aplicarea practică efectivă a acestei reguli se presupune că intervalul de integrare $[a, b]$ a fost divizat într-un număr de N subintervale, $N \in \mathbb{N}$; punînd $h = \frac{b-a}{N}$, se vor obţine $N+1$ puncte x_j din $[a, b]$, scriind $x_j = a + jh$, $j = 0, 1, \ldots, N$, iar consideraţiile anterioare se vor aplica fiecărui interval de forma $[x_j, x_{j+1}]$. Se obţine

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{n}\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{j=1}^{N}(x_{j+1}-x_j)f(x_j) =$$

$$= h[f(a)+2f(a+h)+2f(a+2h)+\ldots+2f(b-h)+f(b)].$$

Notînd

$$D(h) = h[f(a)+2f(a+h)+2f(a+2h)+\ldots$$

$$\ldots+2f(b-h)+f(b)], \quad h=\frac{b-a}{N}, \tag{6.9}$$

se obţine formula de calcul numeric pentru integralele definite, cunoscută sub numele de *regula dreptunghiului* :

$$\int_a^b f(a)\,\mathrm{d}x \approx D(h).$$

Pentru evaluarea erorii, se scriu relaţiile

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - D(h)\right| = \left|\sum_{j=1}^{N}\left[\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,dx - (x_{j+1}-x_j)f(x_j)\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{N} \|f'\|\cdot\frac{1}{2}h^2 = \frac{h}{2}\|f'\|\cdot\frac{b-a}{N}\cdot N = \frac{b-a}{2}\|f'\|\cdot h,$$

din care rezultă că eroarea este de ordinul de mărime al lui h:

$$\int_a^b f(x)\,dx - D(h) = O(h).$$

Justificarea denumirii „regula dreptunghiului" dată acestei metode este evidentă: scriind $\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)f(a)$, s-a aproximat aria trapezului curbiliniu limitat de $x=a$, $x=b$, $y=0$ şi $y=f(x)$ prin aria dreptunghiului avînd lungimea bazei egală cu $b-a$ şi lungimea înălţimii egală cu $f(a)$. Este evident că aceleaşi rezultate se obţin prin înlocuirea punctului $x=a$ prin orice alt punct din intervalul $[a, b]$.

6.2.2.2. *Regula trapezului.* Dacă $n=1$, polinomul de interpolare Lagrange are gradul $\leqslant 1$, iar funcţiile φ_j definite prin (6.2″) vor fi

$$\varphi_0(t) = \frac{t-1}{0-1} = 1-t, \quad \varphi_1(t) = \frac{t-0}{1-0} = t.$$

Deci $\alpha_0 = \int_0^1 \varphi_0(t)\,dt = \frac{1}{2}$, $\alpha_1 = \int_0^1 \varphi_1(t)\,dt = \frac{1}{2}$; rezultă $s=2$ şi $\sigma_0 = s\alpha_0 = 1$, $\sigma_1 = s\alpha_1 = 1$.

În acest mod s-au justificat primele trei coloane ale liniei a doua din primul tabel; pentru a justifica expresia erorii din coloana a patra a aceluiaşi tabel, se poate utiliza (6.6′), pentru $n=1$. Se obţine

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b L(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)-L(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|f^{(2)}\|}{2!}\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx = \frac{1}{12}\|f^{(2)}\|(b-a)^3.$$

Ca şi în cazul regulii dreptunghiului, în practică regula trapezului se aplică considerînd $h=\frac{b-a}{N}$ şi aplicînd aproximarea în speţă subintervalelor $[a, a+h]$, $[a+h, a+2h]$, ..., $[b-h, b]$. Notînd

$$T(h) = \sum_{j=1}^{N}\frac{h}{2}[f(x_j)+f(x_{j-1})] = h\left[\frac{1}{2}f(a) + f(a+h) + \right.$$

$$\left. + f(a+2h) + \ldots + f(b-h) + \frac{1}{2}f(b)\right]$$

(deoarece conform cu linia a doua a celui de-al doilea tabel se efectuează aproximarea $\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(x_j)+f(x_{j-1})]$, va rezulta aproximarea

$$\int_a^b f(a)\,dx \approx T(h),$$

utilizată în cazul regulii trapezului iar eroarea va fi

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - T(h)\right| = O(h^2),$$

deoarece

$$\left|\int_a^b f(x)dx - T(h)\right| \leqslant \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{12}h^3\|f^{(2)}\| = \frac{h^2}{12}\|f^{(2)}\|\cdot\frac{b-a}{N}\cdot N =$$

$$= \frac{b-a}{2}\|f^{(2)}\|h^2.$$

Denumirea de *regula trapezului* provine din faptul că numărul $\frac{h}{2}[f(a)+f(b)]$ este aria unui trapez avînd lungimea înălţimii egală cu h şi lungimile bazelor paralele egale cu $f(b)$ şi $f(a)$.

6.2.2.3. *Regula lui Simpson.* Dacă $n=2$, polinomul de interpolare Lagrange are gradul $\leqslant 2$, iar polinoamele φ_j definite prin (6.2″) vor fi

$$\varphi_0(t) = \frac{(t-1)(t-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{1}{2}(t^3-3t+2), \quad \varphi_1(t) = \frac{(t-0)(t-2)}{(1-0)(1-2)} =$$

$$= 2t - t^2, \quad \varphi_2(t) = \frac{(t-0)(t-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{1}{2}(t^2-t),$$

de unde se deduce $\alpha_0 = \alpha_2 = \frac{1}{3}$, $\alpha_1 = \frac{4}{3}$, ceea ce înseamnă $s = 3$ şi $\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = 4$ şi $\sigma_2 = 1$.

În acest mod s-au justificat primele trei coloane din linia a treia a primului tabel. Justificarea erorii înscrise în coloana următoare nu se mai poate realiza ca la 6.2.2.2, deoarece din (6.6') nu poate apărea $\|f^{(4)}\|$ ci $\|f^{(3)}\|$; vom nota

$$R_2(h) = \int_{x-h}^{x+h} f(x)\mathrm{d}x - \frac{h}{3}\,[f(x-h) + 4f(x) + f(x+h)]$$

şi dacă $f \in C^4(J)$, va rezulta $R_2 \in C^4$. Prin derivări succesive se obţin egalităţile $R_2(0) = R_2'(0) = R_2''(0) = R_2'''(0) = 0$ şi

$$R_2'''(h) = -\frac{1}{3}h[f'''(x+h) - f'''(x-h)] = -\frac{2}{3}h^2 f^{(4)}(\xi),\ \xi \in [x-h,\ x+h].$$

Scriind

$$R_2''(h) = R_2''(0) + \int_0^h R'''(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^h \left[-\frac{2}{3}\,t^2 f^{(4)}(\xi)\right]\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{2}{3}\,f^{(4)}(\xi_1)\int_0^h t^2\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{9}\,h^3 f^{(4)}(\xi_1),$$

apoi

$$R_2'(h) = R_2'(0) + \int_0^h R''(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{9}\int_0^h t^3 f^{(4)}(\xi_1)\,\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{2}{9}\,f^{(4)}(\xi_2)\int_0^h t^3\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{18}\,h^4 f^{(4)}(\xi_2)$$

şi deci

$$R_2(h) = R_2(0) + \int_0^h R_2'(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{18}\int_0^h t^4 f^{(4)}(\xi_2)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{90}\,h^5 f^{(\mathrm{IV})}(\xi_3),$$

ceea ce coincide cu eroarea prescrisă în tabel.

Faptul că prin trecerea de la $n = 1$ la $n = 2$, în expresia erorii se trece de la $\|f^{(2)}\|$ la $\|f^{(4)}\|$, se poate explica prin aceea că în cazul nodurilor echidistante formula de aproximare

$$\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \approx \frac{h}{3}\,[f(x-h) + 4f(x) + f(x+h)]$$

este exactă nu numai pentru polinoame de grad doi ci şi pentru polinoame de grad trei acelaşi lucru se întîmplă prin trecerea de la n impar la n par). Pentru un interval $[a, b]$ dat se consideră $h = \frac{b-a}{2N}$ şi se aplică formula de aproximare pentru intervale de forma $[x_{2j}, x_{2j+2}]$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$; notînd

$$S(h) = \frac{h}{3}\,[f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + \ldots$$

$$\ldots + 2f(b-2-h) + 4f(b-h) + f(b)],$$

se obţine *regula lui Simpson* de calcul aproximativ al integralelor definite

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx D(h),\quad h = \frac{b-a}{2N},\ N \in \mathbb{N},$$

pentru care eroarea este de forma $O(h^4)$, deoarece

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - S(h)\right| \leqslant \frac{h^5}{90}\,\|f^{(4)}\| \cdot N = \frac{b-a}{180}\,\|f^{(4)}\|\,h^4.$$

În mod analog se tratează şi cazurile $n \geqslant 3$.

6.2.3. Metode numerice de tip Runge-Kutta (sau cu un singur pas)

Vom considera ecuaţia diferenţială de ordinul întîi

$$y' = f(x, y) \qquad (6.10)$$

și condiția inițială asociată

$$y(x_0) = y_0. \tag{6.10'}$$

Presupunînd verificate ipotezele teoremei de existență și unicitate (vezi cap. 4), dacă $y = y(x)$ este soluția ecuației (6.10) care verifică (6.10') pentru $x \in [x_0, x_0+a]$, $a > 0$, în locul ecuației (6.10) se poate considera ecuația integrală

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(t, y(t))\mathrm{d}t, \quad x_0 \leqslant x_j < x_{j+1} \leqslant x_0 + a, \tag{6.11}$$

care constituie punctul de plecare al metodelor de tip Runge-Kutta care permit determinarea unor valori numerice aproximative pentru soluția în cauză. Aceste metode se obțin aplicînd integralei din (6.11) metodele numerice de tip Newton-Côtes expuse în 6.2.2 ; pentru aceasta în locul egalității (6.11) se scrie

$$y_{j+1} = y_j + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t \tag{6.11'}$$

în ipoteza $x_{j+1} = x_j + h$, unde $h > 0$ este pasul aproximării și se presupune că y_j este o valoare aproximativă pentru soluția exactă în punctul x_j : $y_j \approx y(x_j)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, x_0$ fiind definit prin (6.10'). În această situație egalitatea (6.11'), prin aplicarea formulelor de tip Newton-Côtes, trebuie să conducă la o relație de recurență, care să permită determinarea lui y_{j+1} cu ajutorul valorilor $x_0, x_1, \ldots, x_j$, $x_{j+1}, y_0, y_1, \ldots, y_j$. Utilizînd formula generală (6.8), se deduce

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(t, y(t))\ \mathrm{d}t = h\,F(x_k, y_k\,;\ h, f),\ k \leqslant j,$$

și deci relațiile de recurență posibile vor avea forma

$$y_{j+1} = y_j + h\,F(x_k, y_k\,;\ h, f),\ k \leqslant j. \tag{6.12}$$

6.2.3.1. *Metoda liniilor poligonale Euler.* Metoda cea mai simplă de integrare numerică este așa-numita *metodă a liniilor poligonale Euler* și corespunde aplicării metodei dreptunghiului integralei din (6.11') ; conform cu 6.2.2.1, formula de recurență corespunzătoare va fi

$$y_{j+1} = y_j + h\,f(x_j, y_j),\ j = 0, 1, 2, \ldots \tag{6.13}$$

în care $x_{j+1} = x_j+h$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ Comparînd cu (6.12), se găsește $F(x_k, y_k, h, f) = f(x_j, y_j)$, iar din punct de vedere geometric valorile (6.13) se pot obține în modul următor : se scrie dreapta care trece prin punctul (x_j, y_j) și are coeficientul unghiular $f(x_j, y_j)$ iar valoarea y_{j+1} se obține prin intersecția acestei drepte cu dreapta $x = x_{j+1}$. Utilizînd această imagine geometrică, se poate realiza o modificare simplă a relațiilor de recurență (6.13), înlocuindu-le prin

$$y_{j+1} = y_j + hf\left[x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} f(x_j, y_i)\right],\quad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{6.13'}$$

obținîndu-se *procedeul Euler modificat*, care din punct de vedere geometric revine la utilizarea unui alt coeficient unghiular în locul coeficientului unghiular $f(x_j, y_j)$; este ușor de verificat că $f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} + f(x_j, y_j)\right)$ este direcția cîmpului de vectori (x, y, p), $p = f(x, y)$ definit de ecuația diferențială (6.10) în punctul P_j situat la mijlocul segmentului M_jM_{j+1}, unde M_j are coordonatele (x_j, y_j) iar M_{j+1} are coordonatele (x_{j+1}, y_{j+1}), unde $x_{j+1} = x_j + h$ iar $y_{j+1} = y_j + h(x_j, y_j)$.

Dacă $y(x_j)$ este valoarea exactă a soluției problemei (6.10), (6.10'), atunci notînd prin $\varepsilon_j = |y_1 - y(x_j)|$, ε_j va fi evident eroarea care apare în punctul x_j prin utilizarea unei metode numerice date. În cazul de față, utilizînd dezvoltarea Taylor a soluției, în ipoteza $f \in C^2(D_2)$, avem

$$y(x_{j+1}) = y(x_j+h) = y(x_j) + hy'(x_j) + \frac{h^2}{2} y''(\xi) = y(x_j) + hf(x_j, y(x_j)) +$$

$$+ \frac{h^2}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\Big|_{x=\xi},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f,$$

și deci, calculînd $|y_{j+1} - y(x_{j+1})| = \varepsilon_{j+1}$, se obține inegalitatea

$$\varepsilon_{j+1} \leqslant \varepsilon_j + h\,|f(x_j, y_j) - f(x_j, y(x_j))| + \frac{h^2}{2} M,\ M = \max_{D_2} \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|$$

care, în baza condiției Lipschitz, $|f(x_j, y_j) - f(x_j, y(x_j))| \leqslant L\,|y_j - y(x_j)| = \varepsilon_j L$, se transformă în relația de recurență

$$\varepsilon_{j+1} \leqslant (1 + hL)\,\varepsilon_j + \frac{h^2}{2} M,\quad j = 0, 1, 2, \ldots, \varepsilon_0 = 0, \tag{6.13''}$$

din care se deduce $\varepsilon_n \leqslant (A^n + A^{n-1} + \ldots + A + 1) \cdot B = B \dfrac{A^n - 1}{A - 1}$,

dacă $A \neq 1$, cu notaţiile $A = 1 + hL$, $B = \dfrac{h^2}{2} M$. Aşadar, eroarea ε_n va verifica inegalitatea

$$\varepsilon_n \leqslant \frac{M}{2L} [(1 + hL)^n - 1] h \leqslant \frac{M}{2L} (e^{nhL} - 1)h,$$

ţinînd seama că $1 + hL \leqslant e^{hL}$. Presupunînd n astfel determinat încît $nh = a$, unde $[x_0, x_0 + a]$, $a > 0$, este intervalul de existenţă al soluţiei în studiu, se obţine $\varepsilon_n \leqslant \dfrac{M}{2L} (e^{aL} - 1)h$, de unde se deduce că $\varepsilon_n \to 0$ dacă $h \to 0$. Cu alte cuvinte, dacă $h = \dfrac{a}{n} \to 0$, atunci valorile aproximative obţinute pentru problema (6.10), (6.10′) prin metoda liniilor poligonale Euler converg către valorile exacte ale soluţiei $[y_j - y(x_j) = O(h)]$.

6.2.3.2. *Metoda Euler-Heun.* Această metodă corespunde aplicării regulii trapezului integralei care apare în egalitatea (6.11′); cu alte cuvinte, se presupune

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f[t, y(t)]\ \mathrm{d}t \approx \frac{h}{2} \{f[x_j, y(x_j)] + f[x_{j+1}, y(x_{j+1})]\}$$

iar formula de recurenţă pentru determinarea succesivă a valorilor numerice $y_1, y_2, \ldots$ va fi

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} [f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_{j+1})], \quad j = 0, 1, 2, \ldots \qquad (6.14)$$

Se constată însă că în afara unor excepţii (de exemplu, dacă f este liniară în y) relaţiile (6.14) sînt inaplicabile direct în practică, deoarece nu exprimă explicit pe y_{j+1} şi deci trebuie aplicate metode de rezolvare în raport cu y_{j+1} acestor relaţii; se poate elimina acest neajuns şi prin introducerea unor valori convenabile pentru y_{j+1} notate $\tilde{y}_{j+1}$, $\tilde{\tilde{y}}_{j+1}$ etc. şi numite *paşi predictori*, cu ajutorul cărora se corectează formula de recurenţă (6.24) cu aşa-numitul *pas corector*.

Se spune că avem în vedere *metoda Euler-Heun* pentru problema (6.20), (6.20′) dacă pasul predictor pentru (6.14) este determinat cu ajutorul metodei Euler de la 6.2.3.1, adică

$$\tilde{y}_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j), \quad j = 0, 1, 2, \ldots \qquad (6.14')$$

iar pasul corector se defineşte prin înlocuirea lui y_{j+1} din membrul drept al lui (6.14) prin $\tilde{y}_{j+1}$, adică

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} [f(x_j, y_j) + f(x_j, \tilde{y}_{j+1})] = [y_j + hf(x_j, y_j)] + \frac{h}{2} [f(x_{j+1}, \tilde{y}_{j+1}) - f(x_j, y_j)]$$

şi deci

$$y_{j+1} = \tilde{y}_{j+1} + \frac{h}{2} [f(x_{j+1}, \tilde{y}_{j+1},) - f(x_j, y_j)], \quad j = 0, 1, 2, \ldots \qquad (6.14'')$$

Reunind aceste fapte, rezultă următoarea schemă pentru aplicarea metodei Euler-Heun:

$$x_{j+1} = x_j + h,$$

$$\tilde{y}_{j+1} = y_j + h f(x_j, y_j) \text{ — pasul predictor,}$$

$$y_{j+1} = \tilde{y}_{j+1} + \frac{h}{2} [f(x_{j+1}, \tilde{y}_{j+1}) - f(x_j, y_j)] \text{ — pasul corector,} \qquad (6.15)$$

$$j = 0, 1, 2, \ldots$$

Pentru evaluarea erorii care apare prin aplicarea acestui procedeu se poate utiliza expresia erorii din regula trapezului şi deoarece avem

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f[t, y(t)]\ \mathrm{d}t = \frac{h}{2} \{f[x_j, y(x_j)] + f[x_{j+1}, y(x_{j+1})]\} - \frac{h^3}{12} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f[x, y(x)]\Big|_{x=t},$$

din (6.11′) se deduce expresia

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + \frac{h}{2}\{f[x_j, y(x_j)] + f[x_{j+1}, y(x_{j+1})]\} - \frac{h^3}{12}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f\Big|_{x=t},$$

care scăzută din expresia lui y_{j+1} definită prin pasul corector (6.14″) conduce la egalitatea

$$y_{j+1} - y(x_{j+1}) = y_j - y(x_j) + \frac{h}{2}\{f(x_j, y_j) - f[x_j, y(x_j)]\} + \frac{h}{2}\{f(x_{j+1}, y_{j+1}) - f[x_{j+1}, y(x_{j+1})]\} + \frac{h^3}{12}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f\Big|_{x=t},$$

din care, în ipoteza $f \in C^2(\bar{D}_2)$, prin aplicarea condiției Lipschitz, se obține o relație de recurență pentru $\varepsilon_j = |y_j - y(x_j)|$:

$$\varepsilon_{j+1} \leqslant \left(1 + \frac{1}{2}Lh\right)\varepsilon_j + \frac{1}{2}hL|\tilde{y}_{j+1} - y(x_{j+1})| + \frac{h^3}{12}M_1,$$

$$M_1 = \max_{x \in \bar{D}_2}\left|\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right|.$$

Eroarea poate fi evaluată în continuare, ținînd seama de (6.13″), în baza faptului că pasul predictor a fost definit cu ajutorul metodei Euler, obținînd

$$\varepsilon_{j+1} \leqslant \left(1 + Lh + \frac{1}{2}L^2h^2\right)\varepsilon_j + \frac{1}{12}(3LM + M_1),$$

$$j = 0, 1, 2, \ldots, \varepsilon_0 = 0.$$

Procedînd analog ca și în cazul metodei Euler, se obține evaluarea finală

$$\varepsilon_n \leqslant \frac{h^2(3LM + M_1)}{12L\left(1 + \frac{1}{2}Lh\right)}\left[\left(1 + hL + \frac{1}{2}h^2L^2\right)^n - 1\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{h^2(3LM + M_1)}{6L(2 + Lh)}(\mathrm{e}^{nhL} - 1) = \frac{h^2(3LM + M_1)}{6L(2 + hL)}(\mathrm{e}^{aL} - 1),$$

care arată că $\varepsilon_n = O(h^2)$, adică metoda Euler-Heun conduce la aproximări mai bune decît metoda Euler.

6.2.3.3. ***Metoda Runge-Kutta.*** Prin *metoda Runge-Kutta* se înțelege metoda de calcul numeric a problemei Cauchy (6.10′) pentru ecuația diferențială (6.10) care corespunde aplicării regulii lui Simpson sau a regulii 3/8 pentru calculul aproximativ al integralei din (6.11′); notînd $y_{j+\frac{1}{2}} = y\left(x_j + \frac{h}{2}\right)$, va rezulta egalitatea

$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{6}h\left[f(x_j, y_j) + 4f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_{j+\frac{1}{2}}\right) + f(x_{j+1}, y_{j+1})\right]$$

prin aplicarea regulii lui Simpson. Este evidentă obligativitatea introducerii pașilor predictori și corectori și, fără a intra în amănunte, vom prezenta schema cea mai simplă de aplicare a acestei metode:

$$k_1 = hf(x_j, y_j), \qquad \tilde{y}_{j+\frac{1}{2}} = y_j + \frac{1}{2}k_1$$

$$k_2 = hf\left(x_j + \frac{h}{2}, y_{j+\frac{1}{2}}\right), \qquad \tilde{\tilde{y}}_{j+\frac{1}{2}} = y_j + \frac{1}{4}(k_1 + k_2)$$

} primul pas predictor,

$$k_3 = hf\left(x_j + \frac{h}{2}, \tilde{\tilde{y}}_{j+\frac{1}{2}}\right), \qquad \tilde{y}_{j+1} = y_j - k_2 + 2k_3$$ — al doilea pas predictor,

$$k_4 = hf(x_{j+1}, \tilde{y}_{j+1}), \qquad y_{j+1} = y_j + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_3 + k_4)$$ — pasul corector.

Se poate arăta că eroarea de aproximare ε_n este de ordinul de mărime al lui h^4; $\varepsilon_n = O(h^4)$.

În cazul aplicării regulei 3/8, schema de aplicare a metodei Runge-Kutta corespunzătoare va fi

$$k_1 = hf(x_n, y_n),\ k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h_2}{2}\right),\ k_4 = hf(x_n + h,\ y_n + k_3),$$

$$k = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_1 + 2k_3 + k_4),$$

$$y_{j+1} = y_j + k.$$

6.2.4. Metode numerice cu mai mulţi paşi

Metodele expuse în 6.2.3, deşi sînt metode cu un singur pas, nece sită totuşi uneori calculul de mai multe ori a valorii lui f la fiecare pas al procesului de rezolvare numerică; aceste metode sînt cu *autostart*, adică nu necesită utilizarea unor altor metode pentru calculul valori lor de plecare. Aceste fapte constituie avantaje indiscutabile, ceea ce face ca metodele amintite să fie destul de mult utilizate în practică. Există însă şi metode numerice de rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale cu mai mulţi paşi care se obţin ca şi în cazul metodelor numerice cu un singur pas, integrînd ecuaţia diferenţială $y' = f(x, y)$ nu într-un interval de forma $[x_j, x_{j+1}]$, $x_{j+1} = x_j + h$, $h > 0$ fiind presupus constant, ci într-un interval de forma $[x_{p-j}, x_{p+k}]$, (adică într-un interval format cu ajutorul mai multor paşi constanţi $[x_{p-j}, x_{p-j+1}] \cup [x_{p+j+1}, x_{p+j+2}] \cup \ldots \cup [x_{p+k-1}, x_{p+k}]$). Se obţine egalitatea

$$y(x_{p+k}) = y(x_{p-j}) + \int_{x_{p-j}}^{x_{p+k}} f[t, y(t)]\,dt, \qquad (6.16)$$

care va conduce la o metodă cu mai mulţi paşi dacă se calculează aproximativ integrala cu ajutorul polinoamelor de interpolare Lagrange, punînd $f(x_j, y(x_i)) = P_q(x_i)$, $i = p, p-1, \ldots, p-q$ (gradul polinomului P_q fiind cel mult egal cu q); cu notaţia $y_i = y(x_i)$, vom putea scrie

$$P_q(x) = \sum_{i=0}^{q} f(x_{p-i}, y_{p-i})\, L_i(x),\quad L_i(x) = \prod_{\substack{r=0\\ r\neq i}}^{q} \frac{x - x_{p-r}}{x_{p-i} - x_{p-r}}$$

iar din (6.16) se deduce egalitatea generală a metodelor cu mai mulţi paşi

$$y_{p+1} = y_{p-j} + h \sum_{i=0}^{q} b_{qi}\, f_{p-i},\ f_j = f(x_j, y_j) \qquad (6.17)$$

în care

$$b_{qi} = \frac{1}{h}\int_{x_{p-j}}^{x_{p+k}} L_i(x)\,dx = \prod_{\substack{r=0\\ r\neq i}}^{q} \int_{-j}^{k} \frac{s+r}{r-i}\,ds.$$

În particular, pentru $k = 1$, $j = 0$ şi $q = 0, 1, 2, \ldots$ se obţine *metoda Adams-Bashforth*:

$$y_{p+1} = y_p + h\,(b_{q0} f_p + b_{q1} f_{p-1} + \ldots + b_{qq} f_{p-q}),\ b_{qi} = \prod_{\substack{r=0\\ r\neq i}}^{q} \int_0^1 \frac{s+r}{r-i}\,ds,$$

$$i = 0, 1, \ldots, q,$$

iar pentru $k=0$, $j=1$ şi $q=0, 1, 2, \ldots$ se obţine *metoda Adams-Moulton*:

$$y_{p+1} = y_p + h\,(b_{q0} f_{p+1} + b_{q1} f_p + \ldots + b_{qq} f_{p-q+1}),\ b_{qi} = \prod_{\substack{r=0\\ r\neq i}}^{q} \int_{-1}^{0} \frac{s+r}{r-i}\,ds.$$

În metoda Adams-Bashforth, valorile b_{qi} se pot calcula imediat, pe cînd valorile $f_p = f(x_p, y_p)$, $\ldots, f_{p-q} = f(x_{p-q}, y_{p-q})$ se presupun determinate fie printr-o metodă numerică cu un singur pas, fie printr-o metodă aproximativă oarecare; metoda Adams-Moulton este însă o metodă implicită deoarece valorile y_{p+1} se află în ambii membri ai formulei de calcul, ceea ce obligă utilizarea unor paşi predictori-corectori. Notînd cu $y_{p+1}^{(i+1)}$, paşii corectori, se poate lua

$$y_{p+1}^{(i+1)} = y_p + h\,[b_{b0} f(x_{p+1}, y_{p+1}^{(i)}) + b_{q1} f(x_q, y_p^{(i)}) + \ldots$$

$$\ldots + x_{qq} f(x_{p-q+1}, y_{p-q+1}^{(i)})],\ i = 0, 1, \ldots$$

Pentru $k=j=1$, din (6.17) se obţine *metoda lui Nyström*:

$$y_{p+1} = y_{p-1} + h\,(g_{q0} f_p + b_{q1} f_{p-1} + \ldots + b_{qq} f_{p-q}),$$

$$b_{qi} = \prod_{\substack{r=0\\ r\neq i}}^{q} \int_{-1}^{+1} \frac{s+r}{r-i}\,ds,\ i = 0, 1, \ldots, q.$$

În particular, dacă se presupune $q = 0$, deoarece $b_{00} = 2$, ultima egalitate conduce la egalitatea $y_{p+1} = y_{p-1} + 2\,h\,f_p$, care constituie de fapt regula dreptunghiulară aplicată integralei

$$\int_{x_{p-1}}^{x_{p+1}} f[t, y(t)]\,dt.$$

În fine, tot din (6.17) pentru $k = 0, j = 2$ se obține *metoda Milne-Thompson*, cu $p + 1$ în loc de p :

$$y_{p+1} = y_{p-1} + h\,[b_{q0} f_{p+1} + b_{q1} f_p + \ldots + b_{qq} f_{p-q+1}),$$

$$b_{qi} = \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^{q} \int_{-2}^{0} \frac{s+r}{r-1}\,ds,\quad i = 0, 1, \ldots, q.$$

6.2.5. Consistență, stabilitate, convergență

În teoria prezentată mai sus, s-au luat în considerație problemele cele mai simple din cadrul metodelor numerice de rezolvare a unei ecuații diferențiale de ordinul întîi; unele completări vor fi tratate în volumul al doilea legate de teoria sistemelor diferențiale și de teoria problemelor la limită pentru ecuații diferențiale.

Vom face cîteva considerații generale în legătură cu problemele care se pun în teoria metodelor numerice pentru ecuații diferențiale. Astfel, prin însăși construcția unei metode numerice se obțin rezultate care diferă de soluția exactă și este important de evaluat precizia pe care o asigură metoda numerică utilizată.

Dacă se notează cu $y_j, j = 1, 2, \ldots$, soluția aproximativă obținută prin una din metodele anterioare cu un singur pas, este posibil să se poată scrie

$$y_{j+1} = y_j + hg(x_j, y_j ; h, f) \tag{6.18}$$

cu $x_{j+1} = x_j + h$. Dacă $z = z(t)$ este soluția exactă a problemei

$$z'(t) = f[t, z(t)],\quad z(x) = y,$$

în care (x, y) formează condiția Cauchy, se poate defini

$$\delta(x, y ; h, f) = \begin{cases} \dfrac{z(x+h) - y}{h}, & \text{dacă } h \neq 0, \\ f(x, y), & \text{dacă } h = 0, \end{cases}$$

cu ajutorul căreia se poate defini și

$$\tau(x, y ; h, f) = \delta(x, y ; h, f) - g(x, y ; h, f), \tag{6.19}$$

g fiind definit prin (6.18); τ se numește *eroare locală de discretizare* și este clar că o metodă numerică va putea fi utilizată dacă

$$\lim_{h \to 0} \tau(x, y ; h, f) = 0.$$

Deoarece

$$\lim_{h \to 0} \delta(x, y ; h, f) = f(x, y),$$

condiția (6.19) este echivalentă, în ipoteza că g este continuă în raport cu h, cu condiția

$$g(x, y ; 0, f) = f(x, y). \tag{6.20}$$

Se spune că o metodă numerică cu un singur pas este *consistentă* cînd egalitatea (6.20) este adevărată pentru orice $x \in [\alpha, \beta]$ și orice $y \in \mathbb{R}$, oricare ar fi f de clasă C^1 în domeniul $[\alpha, \beta] \times \mathbb{R}$.

Metoda liniilor poligonale, în care evident $g(x, y ; h, f) = f(x, y)$ este consistentă; într-adevăr, în ipoteza f de clasă C^p, $p \geqslant 2$, se poate scrie

$$z(x + h) = z(x) + hz'(x) + \frac{1}{2} h^2 u''(x) + \ldots + \frac{h^p}{p!} z^{(p)}(x + \theta h),$$

$0 < \theta < 1$, sau, deoarece $z(x) = y$, $z'(t) = f[t, z(t)]$, vom avea

$$z''(x) = \frac{d}{dx} f[t, z(t)]_{t=x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} f(x, y),$$

$$z'''(x) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} f(x, y) + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} f^2(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} z''$$

etc., ceea ce înseamnă că se obține egalitatea

$$\delta(x, y; h, f) = z'(x) + \frac{1}{2} hz''(x) + \ldots + \frac{1}{p!} h^{p-1} z^{(p)}(x + \theta h) =$$

$$= f(x, y) + \frac{h}{2}\left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} f(x, y)\right] + \ldots$$

termenii nescriși conținînd pe h^2 ca factor. Așadar, în cazul metodei liniilor poligonale se deduce

$$\tau(x, y; h, f) = \delta(x, y; h, t) - g(x, y; h, f) =$$

$$= \frac{h}{2}\left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} f(x, y)\right] + \ldots$$

adică $\tau(x, y; h, f) = O(h)$.

Dacă în cazul unei anumite metode numerice se deduce

$$\tau(x, y; h, f) = O(h^1),\ s \in \mathbb{N},$$

se spune că metoda în cauză este de ordinul s; cu alte cuvinte metoda liniilor poligonale este o metodă de ordinul unu și calcule asemănătoare vor conduce la concluzia că metoda lui Euler modificată este o metodă de ordinul al doilea etc.

În cazul metodelor numerice cu mai mulți pași, eroarea locală de discretizare $\tau = \tau(x, y; h, f)$ se poate scrie sub forma

$$\tau(x, y; h, f) = \frac{1}{h}\left[z(x + sh) + \sum_{j=0}^{s-1} a_j z(x + jh) - \right.$$

$$\left. - hF(x; z(x + sh), z(x + (s - 1)h), \ldots, z(x); h)\right],$$

unde F se poate exprima liniar prin valorile lui f.

O metodă numerică cu mai mulți pași se va numi *consistentă* dacă pentru orice $f \in C^2([\alpha, \beta] \times \mathbb{R})$ există o funcție $A(h)$, astfel încît $\lim_{h \to 0} A(h) = 0$ iar $|\tau(x, y; h, f)| \leqslant A(h)$ pentru orice $x \in [\alpha, \beta]$, $y \in \mathbb{R}$; dacă $A(h) = O(h^s)$, $s \in \mathbb{N}$, se spune că metoda de discretizare este o metodă de ordinul s.

Noțiunea de metodă numerică consistentă poate servi, de exemplu, la stabilirea unor informații relative la metoda în cauză; astfel, cu excepția metodei liniilor poligonale și a metodei Euler-Heun vor fi valabile egalități de forma

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{y(x_{j+1}) - y_{j+1}}{h^{s-1}} \right| = 0,$$

ceea ce înseamnă că, odată cu alegerea unui pas h suficient de mic, se poate obține o evaluare a erorii care apare în metoda numerică aleasă.

În aplicații însă nu este suficient să se utilizeze o metodă numerică sau alta; oricare metodă utilizată conduce la aproximări ale soluției căutate iar pentru $h > 0$ suficient de mic, în vecinătatea punctului de pornire se obțin aproximări convenabile. Totuși, nu se poate ști ce se întîmplă cu aceste valori aproximative într-un interval dat (nu neapărtat de lungime suficient de mică).

Luînd, pentru exemplificare, ecuația diferențială

$$y' = axy,\ a \in \mathbb{R},\ a \neq 0,$$

dacă y și z sînt soluțiile corespunzătoare problemelor Cauchy

$$y(x_j) = y_j,\ z(x_j) = z_j,$$

în ipoteza că z_j este valoarea aproximativă în punctul x obținută pentru o soluție prin aplicarea unei metode numerice date, prin integrare directă (fiind cazul unei ecuații cu variabile separabile) în intervalul $[x_j, x]$, se obține

$$y(x) - z(x) = (y_j - z_j)\left[\exp\left(\frac{1}{2} ax^2\right) - \exp\left(\frac{1}{2} ax_j^2\right)\right].$$

Din examinarea soluției obținute, rezultă două posibilități:

1) dacă $a > 0$, se observă că $|y(x) - z(x)| > |y_j - z_j|$, dacă $x > x_j$;

2) dacă $a < 0$, atunci $|y(x) - z(x)| < |y_j - z_j|$, dacă $x > x_j$ (utilizînd proprietățile funcției exponențiale). Cu alte cuvinte, nu este obligatoriu ca eroarea de aproximare să nu crească odată cu îndepărtarea lui x_j de x_0; sînt posibile cazuri în care eroarea crește.

Dacă pentru o metodă numerică dată se prezintă situația din cazul 1), atunci se spune că problema Cauchy admite *soluții instabile*

iar dacă se prezintă situația 2), atunci se utilizează denumirea de *soluție stabilă* pentru problema Cauchy.

Generalizînd calculele anterioare, se poate obține imediat un *criteriu de stabilitate* (respectiv de instabilitate) simplu pentru soluțiile problemei Cauchy în cazul ecuației diferențiale $y'=f(x,y)$ și anume:

Dacă $\frac{\partial f}{\partial y}<0$, *soluția este stabilă, iar dacă* $\frac{\partial f}{\partial y}>0$, *soluția problemei Cauchy este instabilă* (evident în domeniile în care se verifică inegalitățile respective).

Într-adevăr, notînd ca și mai înainte prin y și z soluțiile ecuației considerate corespunzătoare condițiilor inițiale (x_j, y_j) și (x_j, z_j), vom avea (în ipoteza $f \in C^p$, $p \geqslant 2$)

$$y'(x) - z'(x) = f[x, y(x)] - f[x, z(x)] =$$

$$= \frac{\partial f[x, z(x)]}{\partial y}[y(x) - z(x)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}[y(x) - z(x)]^2 + \ldots$$

și notînd $u = y - z$, prin liniarizare, se obține următoarea ecuație (care este o ecuație cu variații):

$$u'(x) = \frac{\partial f(x, z)}{\partial y} u(x),$$

care devine o ecuație liniară cu coeficienți constanți dacă se aproximează $\frac{\partial f}{\partial y}$ prin f_y, unde f_y este o valoare oarecare (în domeniul în care se ia în considerație ecuația). Prin integrare se găsește

$$y(x) - z(x) = [y(x_j) - z(x_j)] \exp[(x - x_j) f_y]$$

și nu mai rămîne decît să se aplice raționamentul anterior.

Presupunînd că legătura dintre x_j și x_{j+1} (într-o metodă numerică dată) se exprimă printr-o egalitate de forma

$$x_{j+1} = x_j + hg\,(x_j, y_j; h, f),$$

[vezi (6.18)] se compară soluțiile ecuației diferențiale

$$y' = f(x, y)$$

corespunzînd condițiilor inițiale (x_j, y_j) și (x_j, z_j). Notînd $u = y - z$ și presupunînd $f \in C^p$ $(p > 1)$, cu notația $g(x_j, y_j; h, f) = g(x_j, y_j)$, se obține, în ipoteza derivabilității de un număr de ori a acestei funcții:

$$u_{j+1} = y_{j+1} - z_{j+1} = (y_j + hg_j) - (z_j + hg_j) = (y_j - z_j) +$$

$$+ h[g(x_j, y_j) - g(x_j, z_j)] = u_j + h[g(x_j, z_j + u_j) - g(x_j, z_j)] =$$

$$= u_j + h\frac{\partial g(x_j, z_j)}{\partial y} u_j + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} u_j^2 + \ldots$$

Va rezulta egalitatea

$$u_{j+1} = (1 + hg_y)\, u_j,$$

dacă se renunță la puterile $u_j^2, u_j^3, \ldots$ Dacă din $f_y < 0$ va rezulta $g_y < 0$, atunci alegînd $h > 0$ astfel încît

$$|1 + hg_y| < 1$$

va rezulta stabilitatea metodei numerice date, iar dacă din $f_y > 0$ va rezulta $g_y > 0$, se va deduce deci instabilitatea metodei numerice. Toate aceste considerații se pot aplica, în particular, metodei liniilor poligonale precum și altor procedee de discretizare, cum ar fi procedeelor de tip Runge-Kutta.

Evident, rezultatele anterioare nu pot constitui decît o introducere în teoria metodelor numerice pentru ecuații diferențiale.

O ultimă problemă, asupra căreia vom insista în încheiere, este aceea a convergenței unei metode numerice (luînd în considerație doar metodele cu un singur pas).

Vom nota prin $y = y(x)$ soluția problemei

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0,$$

în ipoteza că f este o funcție suficient de regulată astfel încît să fie verificate condițiile teoremei de existență și unicitate; utilizînd notațiile anterioare, vom defini valorile $z_0, z_1, z_2, \ldots$ prin

$$z_{j+1} = z_j + hg(x_j, z_j; h, f) = z_j + hg(x_j, z_j), x_{j+1} = x_j + h,$$

obținînd astfel valorile posibile ale unei probleme numerice pentru situația dată. Vom defini ca eroarea globală de discretizare funcția

$$e(x; h) = z(x; h) - y(x),$$

unde $z(x; h) = z_j$, dacă $x = x_0 + jh$; ne interesează comportarea lui $e = e(x, h)$ pentru x fixat, în ipoteza $h \to 0$, $h \in H_x = \left\{ \frac{x - x_0}{n} \,\middle|\, n = 1, 2, 3, \ldots \right\}$.

O metodă numerică de calcul pentru ecuația dată se numește *convergentă* dacă este îndeplinită condiția

$$\lim_{n \to \infty} e(x; h) = 0. \tag{6.21}$$

Pentru a obține evaluări convenabile pentru funcția e, vom nota

$$\varepsilon_j = z_j - y_j,$$

unde

$$y_j = y_{j-1} + h\,\delta(x_{j-1}, y_{j-1}; h, f) = y_{j-1} + h\,\delta(x_{j-1}, y_{j-1}),$$

δ fiind definit anterior, și vom avea

$$\varepsilon_{j+1} = z_{j+1} - y_{j+1} = [z_j + hg(x_j, y_j)] - [y_j + h\,\delta(x_j, y_j)] =$$

$$= \varepsilon_j + h[g(x_j, z_j) - \delta(x_j, z_j)] + h[\delta(x_j, z_j) - \delta(x_j, y_j)].$$

Dacă pentru δ se verifică o inegalitate de forma

$$|\delta(x_j, y_j) - \delta(x_j, z_j)| \leqslant M |y_j - z_j|,$$

în care $M > 0$ nu depinde de j, ținînd seama că diferența $g(x_j, z_j) - \delta(x_j, z_j)$ este chiar eroarea locală de discretizare, dacă metoda de discretizare este de ordinul s, se deduce cu ușurință relația de recurență

$$|\varepsilon_{j+1}| \leqslant (1 + |h| M)\,\varepsilon_j + N |h|^{s+1}, \tag{6.22}$$

dacă se utilizează inegalitatea $|g(x_j, z_j) - \delta(x_j, z_j)| \leqslant N |h|^s$. Scriind succesiv inegalitatea (6.22) pentru $j = 0, 1, 2, \ldots$, se va găsi.

$$|\varepsilon_k| \leqslant (1 + |h|M)^k\,\varepsilon_0 + N |h|^{s+1} [1 + (1 + |h| M) + \ldots$$

$$\ldots + (1 + |h|M)^{k-1}]$$

și, deoarece $(1 + |h| M) \leqslant \exp(|h| M)$, după însumarea ultimei paranteze se va obține inegalitatea

$$|\varepsilon_k| \leqslant N |h|^k \frac{\exp(k|h|M) - 1}{M},$$

întrucît $\varepsilon_0 = z_0 - y_0 = 0$.

Dacă se consideră $x \neq x_0$, $k = n$, $h = h_n = \frac{x - x_0}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, se deduce

$$|e(x; h_n)| \leqslant N |h_n|^s \frac{\exp(M |x - x_0|) - 1}{M},$$

ceea ce înseamnă că eroarea globală de discretizare are același ordin ca și eroarea locală de discretizare iar, în concluzie, orice procedeu de discretizare consistent este și convergent.

CAPITOLUL 7

Transformări integrale în teoria ecuațiilor diferențiale

7.1. Transformarea Fourier

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ o funcție absolut integrabilă; vom nota prin $\hat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ funcția definită cu ajutorul egalității

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ix\xi}\, dx \tag{7.1}$$

și vom spune că $\hat{f}$ este *transformarea* (sau *transformata*) *Fourier* a lui f; vom utiliza uneori și notația $\hat{f} = F(f)$.

În baza ipotezei de integrabilitate absolută a lui f (aceasta înseamnă $\int_{-\infty}^{+\infty} |f| < \infty$), funcția $\hat{f}$ are sens deoarece din (7.1) se deduce imediat

$$|\hat{f}(\xi)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, |e^{ix\xi}|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f|\, dx < \infty,$$

folosind faptul că $|e^{ix\xi}| = 1$ cînd $x, \xi \in \mathbb{R}$.

Exemple

1. Dacă

$$f(x) = \begin{cases} f_0 \text{ pentru } |x| \leqslant a, \\ 0 \text{ pentru } |x| > a, \end{cases}$$

cu $f_0 \in \mathbb{C}$, $a > 0$, atunci

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix\xi}\, dx = \int_{-a}^{+a} f_0\, e^{ix\xi}\, dx = \frac{f_0}{i\xi}(e^{i\xi a} - e^{-i\xi a}) = \frac{2f_0}{\xi} \sin(a\xi).$$

2. Dacă $f(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$, rezultă

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x| + ix\xi}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|} [\cos(x\xi) + i \sin(x\xi)]\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|} \cos(x\xi)\, dx = 2 \int_{0}^{\infty} e^{-ax} \cos(x\xi)\, dx = \frac{2a}{\xi^2 + a^2},$$

utilizîndu-se faptul că funcția trigonometrică cos (respectiv sin) este pară (respectiv impară) precum și convenția $\int_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{A \uparrow \infty} \int_{-A}^{+A}$ (adică integralele improprii de forma $\int_{-\infty}^{+\infty}$ sînt presupuse convergente în sensul valorii principale).

3. Dacă $f(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$, atunci deoarece f este analitică în planul complex avînd o singularitate la infinit iar $|f(x)| \to 0$ de-a lungul oricărei drepte paralele cu axa reală cînd $|x| \to \infty$ (în baza teoremei lui Cauchy rezultă $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x + iy)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, oricare ar fi $y \in \mathbb{R}$), vom avea

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2 + i\xi x}\, dx = e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{a}x - \frac{i\xi}{2\sqrt{a}}\right)^2} dx =$$

$$= e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\xi^2}{4a}},$$

deoarece $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$.

În particular, dacă $a = \frac{1}{2}$, adică dacă $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, atunci $\hat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\xi^2}{2}}$, adică transformarea Fourier a funcției $e^{-\frac{x^2}{2}}$ coincide, abstracție făcînd de un factor constant multiplicativ, cu funcția inițială.

Teorema 7.1 (*de inversiune a transformării Fourier*). *Dacă* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *este continuă şi absolut integrabilă, atunci are loc egalitatea*

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)\,e^{-ix\xi}\,d\xi, \tag{7.2}$$

numită formula de inversiune a transformării Fourier.

⌜ Utilizînd (7.1), se poate scrie şirul de egalităţi

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)\,e^{-a\xi^2-ix\xi}\,d\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)\,e^{iy\xi}\,dy\right]e^{-a\xi^2-ix\xi}\,d\xi=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a\xi^2+i\xi(y-x)}\,d\xi\right]dy;$$

în baza exemplului 3 integrala interioară este egală cu $\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left[-\frac{(y-x)^2}{4a}\right]$ şi efectuînd schimbarea de variabilă $y=x+2\sqrt{a}\,t$, $dy=2\sqrt{a}\,dt$, se obţine

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)\,e^{-a\xi^2-ix\xi}\,d\xi=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)\,e^{-\frac{(y-x)^2}{4a}}\,dy=$$

$$=2\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+2\sqrt{a}\,t)\,e^{-t^2}\,dt,$$

de unde pentru $a\downarrow 0$ se obţine egalitatea

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)\,e^{-ix\xi}\,d\xi=2\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{-t^2}\,dt,$$

din care, deoarece $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{-t^2}\,dt=f(x)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\,dt=f(x)\sqrt{\pi}$, se obţine (7.2). ⌟

În demonstraţia anterioară s-a utilizat teorema lui Fubini de inversare a ordinii de integrare precum şi treceri la limită sub semnul integrală; toate aceste operaţii sînt permise, deoarece se poate arăta că transformarea Fourier a oricărei funcţii absolut integrabile este o funcţie continuă, mărginită iar $\hat{f}(\xi)\to 0$ cînd $|\xi|\to\infty$. Într-adevăr, $\hat{f}$ este mărginită, deoarece $|\hat{f}(\xi)|\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|f|\,dx<\infty$ şi pentru a arăta că este continuă şi tinde la zero cînd $|\xi|\to\infty$, este suficient să se demonstreze această proprietate pentru funcţia caracteristică a unui interval, deoarece combinaţiile liniare ale acestor funcţii formează o mulţime densă în mulţimea $L_1(\mathbb{R})$ a funcţiilor absolut integrabile pe $\mathbb{R}$, fapt evident, dacă se utilizează egalitatea $\int_a^b 1\cdot e^{i\xi x}\,dx=-\frac{i}{\xi}(e^{i\xi b}-e^{i\xi a})$ (amintim că funcţia caracteristică a unui interval $[a,b]\subset\mathbb{R}$ este funcţia egală cu 1 dacă $x\in[a,b]$ şi egală cu zero dacă $x\notin[a,b]$): funcţia $-\frac{i}{\xi}(e^{i\xi b}-e^{i\xi a})$ este continuă pentru $\xi\in\mathbb{R}$ şi tinde la zero cînd $|\xi|\to\infty$.

În aplicaţii este utilă teorema următoare.

Teorema 7.2. a) *Transformarea Fourier este o aplicaţie liniară.*

b) *Dacă* f *este astfel încît* $f^{(k-1)}(\pm\infty)=0$ *şi* $f^{(k)}\in L_1(\mathbb{R})$, *atunci* $(\hat{f}^{(k)})\xi=(-i\xi)^k\hat{f}(\xi)$, $k\in\mathbb{N}$.

c) *Dacă* f *este astfel încît* $x^kf(x)\in L_1(\mathbb{R})$, *atunci există* $\hat{f}^{(k)}$ *iar* $\hat{f}^{(k)}=[(ix)^k\hat{f}(x)]$.

⌜ a) rezultă din proprietăţile integralei: dacă există $\hat{f}_1$ şi $\hat{f}_2$, va exista

$$(a_1\hat{f}_1+a_2f_2)(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}[a_1f_1(x)+a_2f_2(x)]\,e^{ix\xi}\,dx$$

iar pentru orice $a_1,a_2\in\mathbb{C}$ avem egalitatea $(a_1f_1\hat{+}a_2f_2)=a_1\hat{f}_1+a_2\hat{f}_2$.

Pentru a demonstra b) este suficient să presupunem $k=1$; cazul $k>1$ se obţine prin iterare; or, dacă $f(\pm\infty)=0$, putem scrie

$$(\hat{f}')(\xi)=F(f')(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}f'(x)e^{ix\xi}\,dx=f(x)e^{i\xi x}\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty}-$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)[i\xi\,e^{i\xi x}]\,dx=-i\xi\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{ix\xi}dx=(-i\xi)\,\hat{f}(\xi).$$

Pentru a demonstra c), ca şi în cazul anterior, se poate presupune $k=1$; atunci deoarece funcţia $xf(x)$ este absolut integrabilă, integrala

$i\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)e^{ix\xi}\,dx$ este uniform convergentă și deci poate fi considerată ca fiind derivata în raport cu parametrul ξ a integralei

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{ix\xi}\,dx;$$

rezultă egalitatea

$$\frac{d}{d\xi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{ix\xi}\,dx = i\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)e^{ix\xi}dx,$$

adică $\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi) = [i\widehat{xf(x)}](\xi)$ care coincide cu relația căutată pentru $k = 1$. ⌟

Din teorema 7.2 se pot obține unele informații relative la legătura dintre ordinul de derivare al lui f și rapiditatea descreșterii la infinit a lui $\hat{f}$, precum și la legătura dintre derivabilitatea lui $\hat{f}$ și rapiditatea descreșterii la infinit a lui f.

Astfel, din b) rezultă egalitatea

$$|F(f)| = \frac{|F(f^{(k)})|}{|\xi|^k},$$

care arată că $|F(f)| \to 0$ dacă $|\xi| \to \infty$; prin urmare, dacă în particular f'' există și este un element din $L_1(\mathbb{R})$, atunci $F(f) = \hat{f}$ este o funcție absolut integrabilă, deoarece $\hat{f}$ este mărginită, continuă și descrește la infinit mai repede decît funcția $|\xi|^{-2}$ (care este integrabilă pentru $|\xi| > a$).

Din c) se obține proprietatea următoare: cu cît descreșterea la infinit a lui f este mai rapidă, cu atît ordinul de derivabilitate al lui $\hat{f}$ este mai mare; într-adevăr, dacă funcțiile $f(x)$, $xf(x)$, ..., $x^k f(x)$ sînt absolut integrabile pe $\mathbb{R}$, vom avea

$$|f(x)| \leqslant \frac{M}{x^p},\quad p = 0, 1, \ldots, k,$$

deci $|f(x)| \to 0$, cînd $|x| \to \infty$ și atunci există derivata $\frac{d^k}{d\xi^k}\hat{f}$.

În particular $\hat{f}$ va fi o funcție indefinit derivabilă, dacă pentru orice $k \in \mathbb{N}$ avem $x^k f(x) \in L_1(\mathbb{R})$.

Din aceste considerații rezultă că prin trecerea de la f la transformata Fourier $\hat{f}$ proprietățile de derivabilitate și descreștere la infinit

de un anumit ordin își schimbă rolurile, ceea ce permite introducerea unui spațiu important de funcții, notat cu $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, cu proprietatea că dacă $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, atunci $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ($\mathcal{S}(\mathbb{R})$ se mai numește *spațiul lui Schwartz*).

Vom spune că $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ dacă $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ iar $|x^k \varphi^{(j)}(x)| \leqslant C_{kj}$, unde constantele nenegative C_{kj} depind de φ precum și de indicii k și j.

Revenind la teorema 7.1, trebuie menționat că formula de inversiune poate fi demonstrată și în condiții mai generale decît cele enunțate în teoremă; astfel se poate arăta că dacă $f \in L_1(\mathbb{R})$ și dacă pentru un $x \in \mathbb{R}$ fixat se poate găsi $\delta > 0$, astfel încît există

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{f(x+t) - f(x)}{t}\right| dt \quad (\textit{condiția lui Dini}),$$

atunci în acel punct x are loc egalitatea (7.2).

De asemenea, dacă $f \in L_1(\mathbb{R})$ și dacă f are [variația mărginită pe intervalul $[x_0 - \delta,\ x_0 + \delta]$, $\delta > 0$, atunci are loc egalitatea

$$\frac{1}{2}[f(x_0 +) + f(x_0 -)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\,e^{-i\xi x}\,d\xi,$$

care poate fi considerată ca o generalizare a egalității (7.2), deoarece dacă în punctul $x_0 \in \mathbb{R}$ funcția f este continuă, atunci $\frac{1}{2}[f(x_0+) + f(x_0-)] = f(x_0)$.

Dacă în (7.2) se înlocuiește f prin membrul drept al lui (7.1), se obține o nouă egalitate, numită *formula lui Fourier*:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-i\xi(x-t)}\,dt \tag{7.3}$$

valabilă pentru orice punct x de continuitate a funcției $f \in L_1(\mathbb{R})$ (dacă în punctul x funcția f admite un salt, în membrul strîng se înlocuiește $f(x)$ prin $\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$.

Dacă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in L_1(\mathbb{R})$, atunci, deoarece $e^{ix\xi} = \cos(x\xi) + i\sin(x\xi)$, rezultă

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ix\xi}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(x\xi)\, dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(x\xi)\, dx; \tag{7.4}$$

dacă în plus f este funcţie pară, ultima integrală este nulă şi se obţine egalitatea

$$\hat{f}(\xi) = 2\int_0^{\infty} f(x)\cos(x\xi)\, dx \tag{7.5}$$

iar dacă f este funcţie impară, din (7.4) rezultă egalitatea

$$\hat{f}(\xi) = 2i\int_0^{\infty} f(x)\sin(x\xi)\, dx. \tag{7.5'}$$

Scriind în (7.5), respectiv în (7.5'), f în loc de $2f$, respectiv f în loc de $2if$, se obţine *transformarea Fourier prin cosinus*

$$f_c(\xi) = \int_0^{\infty} f(x)\cos(x\xi)\, dx \tag{7.6}$$

şi *transformarea Fourier prin sinus*

$$\hat{f}_s(\xi) = \int_0^{\infty} f(x)\sin(x\xi)\, dx.$$

Pentru a găsi formulele inverse ale transformărilor (7.6) şi (7.6') se poate utiliza formula lui Fourier (7.3) care pentru $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ devine

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos[\xi(x-t)]\, dt, \tag{7.3'}$$

dacă se ţine seama de expresia exponenţialei prin funcţiile trigonometrice, de paritatea funcţiei $\cos[\xi(x-t)]$ (în raport cu ξ) şi imparitatea funcţiei $\sin[\xi(x-t)]$ (în raport cu ξ); din (7.3') se obţine, în continuare, egalitatea

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\xi t)\, dt\right]\cos(\xi x)\, d\xi + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\xi t)\, dt\right]\sin(\xi x)\, d\xi$$

care pentru f funcţie pară, ţinînd seama de (7.6') se scrie

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f(t)\cos(\xi t)\, dt\right]\cos(\xi x)\, d\xi = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\hat{f}_c(\xi)\cos(\xi x)\, d\xi$$

iar pentru f funcţie impară, în baza lui (7.6'), vom avea

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{+\infty} f(t)\sin(\xi t)\, dt\right]\sin(\xi x)\, d\xi = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\hat{f}_s(\xi)\sin(\xi x)\, d\xi.$$

Aşadar, formulele inverse formulelor (7.6) şi (7.6') vor fi

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\hat{f}_c(\xi)\cos(\xi x)\, d\xi,\quad f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\hat{f}_s(\xi)\sin(\xi x)\, d\xi \tag{7.7}$$

şi este evident că atît aceste egalităţi cît şi relaţiile (7.6) şi (7.6') sînt valabile în aceleaşi ipoteze asupra lui f ca şi în cazul formulelor (7.1) şi (7.2); dacă, în particular, x este un punct de salt pentru f, atunci în membrul stîng al relaţiilor (7.7) în loc de $f(x)$ trebuie scris

$$\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)].$$

Exemple

4. Dacă $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-ax}$, $a > 0$, rezultă

$$\hat{f}_c(\xi) = \int_0^{\infty} e^{-ax}\cos(x\xi)\, dx = \frac{a}{a^2+\xi^2},\quad \hat{f}_s(\xi) = \int_0^{\infty} e^{-ax}\sin(x\xi)\, dx = \frac{\xi}{a^2+\xi^2}.$$

5. Utilizînd formulele inverse (7.7), se obţin egalităţile

$$\frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(x\xi)\,d\xi}{a^2+\xi^2} = e^{-ax},\ a>0,\ x\geqslant 0,\quad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\xi\sin(x\xi)\,d\xi}{a^2+\xi^2} = e^{-ax},\ a>0,\ x>0.$$

Trebuie făcută observaţia că deşi transformările Fourier prin cosinus şi prin sinus s-au dedus în ipoteza parităţii, respectiv a imparităţii lui f, formulele (7.6) şi (7.6′) pot fi aplicate oricăror funcţii definite pe $\mathbb{R}_+$ cu valori reale sau complexe iar funcţiile $\hat{f}_c$ şi $\hat{f}_s$ vor fi automat funcţii pare, respectiv impare (definite deci pentru $\xi\in\mathbb{R}$).

O proprietate importantă a transformării Fourier (7.1) este exprimată prin

Teorema 7.3. *Dacă $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ sînt absolut integrabile, atunci există aplicaţia integrabilă $f*g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ definită prin relaţia*

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g(x-t)\,dt \qquad \left(=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,f(x-t)\,dt\right) \tag{7.8}$$

numită convoluţia aplicaţiilor f şi g şi este valabilă egalitatea

$$\widehat{(f*g)} = \hat{f}\cdot\hat{g}. \tag{7.9}$$

⌜ Din (7.8) rezultă că aplicaţia $f*g$ are sens pentru aproape toţi $x\in\mathbb{R}$, în baza teoriei integralelor cu parametri; într-adevăr, luînd în consideraţie integrala iterată $\int_{-\infty}^{+\infty}\left[|f(t)|\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x-t)\,dx|\right]dt$, dacă în integrala interioară se consideră t fixat, se poate efectua schimbarea de variabilă $x-t=y$ şi se obţine egalitatea

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[|f(t)|\int_{-\infty}^{+\infty}|g(y)|\,dy\right]dt=\int_{-\infty}^{+\infty}|f|\,dx\int_{-\infty}^{+\infty}|g|\,dx=\|f\|\cdot\|g\|;$$

deci, una din integralele iterate ale funcţiei $|f(t)\,g(x-t)|$ există şi în baza teoremei lui Fubini va rezulta atît existenţa celeilalte integrale iterate, cît şi existenţa integralei duble, iar aceste integrale vor fi egale.

Din existenţa integralei duble $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)g(x-t)|\,dt\,dx$ rezultă existenţa integralei

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(f*g)(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,g(x-t)\,dt\right]dx$$

şi deoarece

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f*g|\,dx\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)\,g(x-t)|\,dt,$$

rezultă $f*g\in L_1(\mathbb{R})$.

Egalitatea $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,g(x-t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)\,g(t)\,dt$ se obţine prin schimbarea de variabilă $x-t=y$ iar relaţia (7.9) rezultă din următorul şir de egalităţi:

$$(\hat{f}*g)(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}(f*g)(x)\,e^{ix\xi}\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,g(x-t)\,dt\right]e^{ix\xi}\,dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{it\xi}\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}g(x-t)\,e^{i(x-t)\xi}\,d(x-t)=\hat{f}(\xi)\cdot\hat{g}(\xi).$$

⌟

Prin urmare, teorema 7.3 arată că transformarea Fourier reduce operaţia de convoluţie la operaţia simplă de înmulţire a funcţiilor, fapt care este utilizat în largă măsură în aplicaţii; astfel, de exemplu, în cazul ecuaţiilor integrale de forma

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}k(x-t)\,g(t)\,dt,$$

unde $f, k, g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ sînt astfel încît g trebuie exprimat prin f şi k (deci f şi k se presupun cunoscute şi g este funcţie necunoscută), deoarece $f=k*g$, rezultă $\hat{f}=\hat{k}\cdot\hat{g}$ şi deci $\hat{g}=\hat{f}\cdot\hat{k}_1$, unde $\hat{k}_1=\frac{1}{\hat{k}}$

și soluția căutată va fi

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, k_1(x-t)\, \mathrm{d}t.$$

Un alt rezultat important din teoria transformării Fourier este exprimat prin egalitatea

$$2\pi\,(f, g) = (\hat{f}, \hat{g}), \tag{7.10}$$

dacă se înțelege prin (f, g) integrala $\int_{-\infty}^{+\infty} f\,\bar{g}\,\mathrm{d}x$, în ipoteza că au sens expresiile $(\hat{f}, \hat{g})$ și (f, g); într-adevăr, se pot scrie egalitățile următoare:

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \overline{g(x)}\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\, \mathrm{d}\xi\right] \overline{g(x)}\, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\, \mathrm{d}x\right] \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi}(\hat{f}, \hat{g}).$$

Dacă în (7.10) se presupune $f=g$, deci $\hat{f}=\hat{g}$, va rezulta *egalitatea lui Parseval* pentru transformarea Fourier:

$$2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2\, \mathrm{d}\xi, \tag{7.11}$$

din care rezultă, în particular, că dacă $f \in L_2(\mathbb{R})$, atunci $\hat{f} \in L_2(\mathbb{R})$.

Dezavantajul utilizării curente a transformării Fourier constă în faptul că nu toate funcțiile elementare posedă o transformată Fourier; de exemplu, funcțiile polinom nu admit transformări Fourier în sensul definit mai sus, deoarece ele nu sînt elemente din $L_1(\mathbb{R})$.

Acest dezavantaj nu mai apare dacă se utilizează convenția ca funcțiile elementare să fie considerate distribuții, deoarece, dacă f este o distribuție, se poate defini transformarea ei Fourier iar această transformare Fourier este din nou o distribuție. Asupra acestor probleme vom reveni în 7.3.

7.2. Transformarea Laplace

O transformare integrală strîns legată de transformarea Fourier este *transformarea Laplace* definită pentru funcții $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ cu ajutorul relației

$$L(f)(p) = \int_0^{\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t, \quad p \in \mathbb{C}, \tag{7.12}$$

în ipoteza că integrala improprie din membrul drept este convergentă.

Așadar, prin transformarea Laplace a lui f, notată $L(f)$, se înțelege o funcție de variabila complexă p, definită prin egalitatea (7.12). În legătură cu existența transformării Laplace $L(f)$ este important rezultatul următor:

Teorema 7.4. *Dacă $L(f)$ există pentru $p_0 \in \mathbb{C}$, atunci $L(f)(p)$ există pentru orice $p \in \mathbb{C}$ astfel încît* $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p_0$ *iar $L(f)$ este analitică în semiplanul* $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p_0$.

⌐ Să notăm

$$F(p_0;\, A) = \int_0^A \mathrm{e}^{-p_0 t} f(t)\, \mathrm{d}t, \quad A > 0;$$

atunci, deoarece prin ipoteză integrala din (7.12) este convergentă pentru $p = p_0$, înseamnă că $|F(p_0; A)| \leqslant M$ pentru orice $A \in \mathbb{R}_+$. Vom putea scrie:

$$L(f)(p) = \lim_{A\uparrow\infty} \int_0^A f(t)\, \mathrm{e}^{-pt}\ \mathrm{d}t = \lim_{A\uparrow\infty} \int_0^A f(t)\, \mathrm{e}^{-(p-p_0)t} \cdot \mathrm{e}^{p_0 t}\, \mathrm{d}t =$$

$$= \lim_{A\uparrow\infty} \int_0^A \mathrm{e}^{-(p-p_0)t} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_0^t f(y)\, \mathrm{e}^{-p_0 y}\, \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}t =$$

$$= \lim_{A\uparrow\infty} \int_0^A (p-p_0)\, \mathrm{e}^{-(p-p_0)t} F(p_0; t)\, \mathrm{d}t,$$

ultima egalitate fiind o consecință a faptului că $F(p_0; t) = \int_0^t f(y)\, \mathrm{e}^{-p_0 y}\, \mathrm{d}y$ și a unei integrări prin părți. Cum $|F(p_0; t)| \leqslant M$,

avem

$$\left|\int_0^A (p-p)_0\ \mathrm{e}^{-(p-p_0)t} F(p_0;\ t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant |p-p_0|\ M\int_0^A |\mathrm{e}^{-(p-p_0)t}|\,\mathrm{d}t =$$

$$= |p-p_0|\ M\int_0^A \exp\,[\mathrm{Re}(p_0-p)t]\,\mathrm{d}t$$

şi integrala va fi convergentă cînd $A \uparrow \infty$ numai dacă exponentul este negativ, adică dacă $\mathrm{Re}(p_0-p) < 0$, deci dacă $\mathrm{Re}\ p_0 < \mathrm{Re}\ p$. În plus, integrala este uniform convergentă pentru $p \in S$, $S \subset \mathbb{C}$ fiind orice mulţime mărginită de numere complexe pentru care $\mathrm{Re}\ p > \mathrm{Re}\ p_0$.

Deoarece integrala $\int_0^A \mathrm{e}^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t$ este analitică pentru $p \in \mathbb{C}$ cu $\mathrm{Re}\,p > \mathrm{Re}\,p_0$ dacă $A < \infty$, la limită, pentru $A \uparrow \infty$ rezultă $L(f)$ de asemenea analitică, fiind limita unui şir uniform convergent de funcţii analitice :

$$L(f)(p) = \lim_{A\to\infty} \int_0^A \mathrm{e}^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ cu } A \in \mathbb{N}.$$

⌟

Fie E_f mulţimea numerelor reale $\mathrm{Re}\ p$ pentru care transformarea Laplace aplicată lui f are sens şi fie $c = \inf E_f$; dacă $c = -\infty$, transformarea Laplace (7.12) se poate aplica lui f pentru orice $p \in \mathbb{C}$ iar $L(f)$ este o funcţie analitică în întreg planul complex.

Dacă $c \in \mathbb{R}$, atunci transformarea Laplace (7.12) aplicată lui f are sens numai dacă $\mathrm{Re}\ p > c$ şi nu este aplicabilă lui f dacă $\mathrm{Re}\ p < c$.

În fine, dacă $c = +\infty$, transformarea Laplace (7.12) nu are sens pentru nici o valoare $p \in \mathbb{C}$.

Din aceste motive, numărul real c definit mai sus se numeşte *frontiera exponenţilor de convergenţă* a transformării Laplace (7.12) iar dreapta $\mathrm{Re}\ p = c$, paralelă cu axa imaginară din planul complex p, se numeşte *frontiera domeniului de convergenţă* a transformării Laplace (7.12).

De obicei, funcţia f care apare în (7.12) se numeşte *original* (sau *funcţie original* a transformării Laplace) iar $L(f)$ poartă denumirea de *imagine* (sau *funcţie imagine* a transformării Laplace); în practică se presupune că funcţia original are următoarele proprietăţi :

I) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ şi este local-integrabilă pe $\mathbb{R}$, adică pentru orice $[a, b] \subset \mathbb{R}$ avem $\int_a^b |f| < \infty$;

II) $f(x) = 0$, dacă $x < 0$;

III) transformarea Laplace (7.12) are sens pentru cel puţin o valoare $p \in \mathbb{C}$.

Rezultă deci că oricărui original f îi corespunde $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ astfel încît transformarea Laplace (7.12) are sens pentru orice p cu $\mathrm{Re}\ p > c$ iar $L(f)$ este funcţie analitică în semiplanul $\mathrm{Re}\ p > c$ şi nu are sens pentru orice număr $p \in \mathbb{C}$ pentru care $\mathrm{Re}\ p < c$.

Determinarea efectivă a numărului c definit anterior este o problemă destul de dificilă ; există însă situaţii, importante în aplicaţii în care numărul c se poate determina uşor. Astfel, dacă funcţia original definită prin proprietăţile I — III verifică o inegalitate de forma

$$|f(t)| \leqslant M\,\mathrm{e}^{rt},\ M \in \mathbb{R}_+,\ r \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_+, \tag{7.13}$$

atunci $c \leqslant r$, deoarece din (7.12) vom obţine

$$|L(f)(p)| \leqslant \int_0^\infty |f(t)|\,|\,\mathrm{e}^{-pt}|\,\mathrm{d}t \leqslant M\int_0^\infty \mathrm{e}^{(r\,-\,\mathrm{Re}\ p)t}\,\mathrm{d}t$$

iar ultima integrală este convergentă pentru $r - \mathrm{Re}\ p < 0$, deci dacă $\mathrm{Re}\ p > r$.

O proprietate importantă a transformării Laplace (7.12) este aceea că $L(f)(p) \to 0$ dacă $p \to \infty$ pe orice drum din semiplanul $\mathrm{Re}\ p > c$, $c \in \mathbb{R}$ fiind frontiera exponenţilor de convergenţă a transformării Laplace (7.12). Într-adevăr, deoarece

$$|L(f)(p)| = \left|\int_0^\infty f(t)\ \mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_0^A f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_A^\infty f(t)\ \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\right|,$$

cum pentru $\mathrm{Re}\ p > c$ ultima integrală este oricît de mică, dacă A este suficient de mare, este suficient să arătăm că $\int_0^A f(t)\ \mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \to 0$ cînd $|p| \to \infty$, $\mathrm{Re}\ p > c$. Pentru aceasta vom scrie

$$\int_0^A f(t)\ \mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_0^A [f(t) - g(t)]\ \mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t + \int_0^A g(t)\ \mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

şi presupunînd $g \in C^1([0, A])$ iar $|f(t) - g(t)| < \varepsilon$, $t \in [0, A]$ (deci aproximînd funcţia absolut integrabilă f prin funcţii de clasă C^1) vom avea

$$\left|\int_0^A f(t)\, e^{-pt}\, dt\right| \leqslant \varepsilon \int_0^A e^{-t\operatorname{Re} p}\, dt + \left|\int_0^A g(t) e^{-pt}\, dt\right|$$

şi va fi suficient să arătăm că $\int_0^A g(t)\, e^{-pt}\, dt \to 0$ cînd $|p| \to \infty$. Or, integrînd prin părţi, găsim

$$\int_0^A g(t)\, e^{-pt}\, dt = \frac{1}{p}\left[g(0+) - g(A)\, e^{-pA} + \int_0^A g'(t)\, e^{-pt}\, dt\right]$$

şi deci

$$\left|\int_0^A g(t)\, e^{-pt}\, dt\right| \leqslant \frac{M}{p},$$

cu

$$M = |g(0+)| + |g(A)|\, e^{-\operatorname{Re} p_0 A} + \int_0^A |g'(t)|\, e^{-t\operatorname{Re} p_0}\, dt$$

şi $\operatorname{Re} p_0 > c$. Prin urmare

$$\int_0^A g(t)\, e^{-pt}\, dt \to 0 \text{ cînd } |p| \to \infty.$$

O problemă importantă în teoria transformării Laplace este problema inversiunii acestei transformări, adică problema găsirii lui f cînd se cunoaşte transformarea sa Laplace (7.12). În acest sens este valabil rezultatul următor:

Teorema 7.5. *Dacă pentru funcţia original f există $a \in \mathbb{R}$, astfel încît funcţia $g(t) = f(t)\, e^{-at}$ verifică ipotezele:*
1) *g este absolut integrabilă pe $\mathbb{R}_+$,*
2) *pentru g este valabilă formula lui Fourier (7.3),*
atunci este valabilă formula lui Mellin

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} L(f)(p)\, e^{pt}\, dp \qquad (7.14)$$

(în care integrarea se efectuează pe dreapta $a+iy$ din planul complex p).
⌜ Din formula lui Fourier (7.3) rezultă

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, e^{-i\xi(t-x)}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi t}\, d\xi \int_0^{\infty} g(x) e^{i\xi x}\, dx,$$

deoarece $g(x) = 0$ dacă $x < 0$ (f fiind original). Înlocuind $g(x)$ prin $f(x)\, e^{-ax}$, se obţine egalitatea

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t(a-i\xi)}\, d\xi \int_0^{\infty} f(x)\, e^{-x(a-i\xi)}\, dx$$

care cu notaţia $p = a - i\xi$ se va scrie sub forma echivalentă

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} e^{pt} L(f)(p)\, dp,$$

deoarece $d\xi = -\frac{1}{i}dp$. ⌟

Deoarece $L(f)$ este analitică pentru $\operatorname{Re} p > c$ şi nulă la infinit, în baza teoremei lui Cauchy, rezultă că rolul numărului real a îl poate juca orice număr real astfel încît $a > c$. În plus, dacă în punctul t, funcţia f are un salt, evident prin $f(t)$ trebuie să se înţeleagă numărul $\frac{1}{2}[f(t+) + f(t-)]$.

Aşadar, problema inversiunii transformării Laplace se reduce la calculul unei integrale de contur, conturul fiind o dreaptă paralelă cu axa imaginară din planul complex p, aflată în domeniul de analiticitate a lui $L(f)$ şi este evident că uneori este posibilă determinarea lui f prin aplicarea teoremei reziduurilor. Aplicînd această teoremă formulei lui Mellin (7.14) în ipoteza că $L(f)$ este astfel încît este posibilă aplicarea teoremei reziduurilor, va rezulta următoarea funcţie original:

$$f(t) = \sum_k \operatorname{rez}[F(p) e^{pt}], \qquad (7.15)$$

suma referindu-se la toate singularităţile lui F din planul p, cu notaţia $F = L(f)$.

Exemple

6. Dacă $F(p) = \dfrac{A(p)}{B(p)}$, A și B fiind polinoame, astfel încît $\deg A < \deg B$, atunci din formula (7.15) rezultă

$$f(t) = \sum_k \operatorname{rez}\,[F(p)e^{pt}] = \sum_k \frac{1}{(m_k-1)!} \lim_{p\to p_k} \frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}}\,[F(p)e^{pt}(p-p_k)^{m_k}],$$

unde p_k sînt zerourile lui B avînd ordinele de multiplicitate m_k, $\sum_k m_k = \deg B$ (cu deg este notat gradul unui polinom).

În particular, dacă aceste zerouri sînt simple, avem

$$f(t) = \sum_k \frac{A(p_k)}{B'(p_k)}\, e^{p_k t}.$$

7. Fie $F(p) = \dfrac{p}{p^2+a^2}$; rezultă

$$f(t) = \frac{ia}{2ia}\, e^{iat} + \frac{-ia}{-2ia}\, e^{iat} = \cos(at);$$

dacă $F(p) = \dfrac{p}{p^2-a^2}$, rezultă

$$f(t) = \frac{1}{2}\, e^{at} + \frac{1}{2}\, e^{-at} = \operatorname{ch}(at).$$

În unele aplicații practice este utilă teorema următoare:

Teorema 7.6. *Dacă F este analitică la infinit:*

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{p^k},$$

atunci funcția original corespunzătoare va fi

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(k-1)!}\, t^{k-1}$$

(care este o funcție întreagă);

Dacă $F(p) \to 0$ cînd $p \to \infty$ iar $\operatorname{Re} p < a$, $a \in \mathbb{R}_+$, și F nu admite decît $p = 0$ ca punct de ramificare, atunci dacă

$$F(p) = p^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^{k\beta}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad \beta \in \mathbb{R}_+,\ \alpha + k\beta \in \mathbb{Z}_+,$$

funcția original corespunzătoare va fi

$$f(t) = t^{-\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\Gamma(-\alpha-k\beta)}\, \frac{1}{t^{k\beta}}.$$

⌊ Deoarece F este presupusă analitică pentru $|p| \geqslant R > 0$, punînd $p = \dfrac{1}{q}$, funcția

$$F_1(q) = F\left(\frac{1}{q}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k q^k$$

va fi analitică pentru $|q| < \dfrac{1}{R}$ și în baza inegalităților lui Cauchy pentru coeficienți, avem $|a_k| \leqslant MR^k$, $k \in \mathbb{N}$; atunci, deoarece

$$|f(t)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \frac{|t^{k-1}|}{(k-1)!} \leqslant MR \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(R|t|)^k}{k!} = MR\, e^{R|t|},$$

seria $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{a_k}{(k-1)!}\, t^{k-1}$ fiind absolut și uniform convergentă pentru orice t, funcția f va fi funcție întreagă de variabila complexă t iar dacă $t > 0$, avem $|f(t)| \leqslant A\, e^{Rt}$ și deci f poate fi considerată funcție original iar prima parte a teoremei va fi demonstrată dacă arătăm că $L(f)(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{a_k}{p^k}$. Or seria care se obține înmulțind seria lui f cu e^{-pt} este uniform convergentă și integrînd termen cu termen se obține

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt = \int_0^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(k-1)!}\, t^{k-1} \right) e^{-pt}\, dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(k-1)!} \int_0^{\infty} t^{k-1} e^{-tt}\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(k-1)!}\, \Gamma(k)\, p^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k p^{-k},$$

deoarece $\Gamma(k) = (k-1)!$, $k \in \mathbb{N}$.

Pentru partea a doua a teoremei, se consideră un contur închis $C_{R,r}$ (format din segmentul $[a - ib,\ a + ib]$ al dreptei $\operatorname{Re} p = a$, din arcul C'_R al cercului $|p| = R$, $\operatorname{Re} p < a$, $\operatorname{Im} p < 0$, din arcul C''_R al aceluiași cerc $|p| = R$ dar cu $\operatorname{Re} p < a$, $\operatorname{Im} p > 0$, segmentul $[-R, -r]$, cercul $|p| = r$ și iarăși segmentul $[-r, -R]$), în interiorul căruia aplicîndu-se metodele curente ale analizei complexe F va fi uniformă; pentru $R \to \infty$ se obține un nou contur C_r format din tăietura $-\infty < \operatorname{Re} p < -r$ parcursă de două ori și cercul $|p| = r$ (fără punctul $p = -r$) care înlocuiește dreapta $\operatorname{Re} p = a$ pe care se integrează în cazul formulei lui Mellin. Rezultă deci

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\, e^{pt}\, dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} F(p)\, e^{pt} dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} p^{\alpha+k\beta}\, e^{pt}\, dp \right) = t^{-\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k\, t^{-k\beta}}{\Gamma(-\alpha - k\beta)},$$

deoarece

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} p^{\alpha+k\beta}\, e^{pt}\, dt = \frac{t^{-\alpha-k\beta-1}}{2\pi i}\int_{C_{rt}} z^{\alpha+k\beta}\, e^{z}\, dz = \frac{t^{-\alpha-k\beta-1}}{\Gamma(-\alpha-k\beta)};$$

în plus dacă $-\alpha - k\beta \in \mathbb{Z}_+$, atunci $\dfrac{1}{\Gamma(-\alpha-k\beta)} = 0$. ⌟

Vom stabili cîteva proprietăți ale transformării Laplace.

Teorema 7.7. *Sînt valabile următoarele afirmații:*

a) *dacă* $f = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k$, *atunci dacă există* $L(f_k)$, $k = 1, \ldots, n$, *există și* $L(f)$ *iar*

$$L(f) = \sum_{k=1}^{n} a_k\, L(f_k) \text{ cu } a_k \in \mathbb{C} \text{ (proprietatea de liniaritate)};$$

b) *dacă* $\alpha > 0$ *și* f *este funcția original,*

$$L\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right](p) = \alpha L(f)(\alpha p) \text{ (proprietatea de omotetie)};$$

c) *pentru orice* $b \in \mathbb{C}$ *avem*

$$L[e^{bt} f(t)](p) = L(f)(p - b) \quad \text{(proprietatea de deplasare)};$$

d) *dacă* $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, *este o funcție original ca și* f, *atunci*

$$L(f^{(n)})(p) = p^n L(f)(p) - p^{n-1} f(0+) - p^{n-2} f'(0+) - \ldots$$

$$\ldots - p f^{(n-2)}(0+) - f^{(n-1)}(0+)$$

(transformarea Laplace pentru derivatele originalului);

e) *dacă* f *este funcție original, atunci*

$$\frac{d^n}{dp^n} L(f)(p) = (-1)^n L[t^n f(t)](p)$$

(derivarea funcției imagine);

f) *dacă* f *este funcție original, atunci*

$$L\left[\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n)\, dt_n\right](p) =$$

$$= L\left[\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\, d\tau\right](p) = p^{-n} L(f)(p)$$

(integrarea funcției original);

g) *dacă* f *este funcție original și dacă integrala* $\int_p^{\infty} L(f)(q)\, dq$ *este convergentă, atunci*

$$\int_p^{\infty} L(f)(q)\, dq = L\left[\frac{f(t)}{t}\right](p)$$

(integrarea funcției imagine).

⌜ a) $$L\left(\sum_{k=1}^{n} a_k f_k\right)(p) = \int_0^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(t)\right] e^{-pt}\, dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k \int_0^{\infty} f_k(t)\, e^{-pt}\, dt = \sum_{k=1}^{n} a_k\, L(f_k)(p);$$

b) $L\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right](p)=\int_0^\infty f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \underset{t=\alpha x}{=} \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{e}^{-(p\alpha)x}\,\alpha\,\mathrm{d}x =$

$$= \alpha L(f)(p\alpha);$$

c) $L\left[\mathrm{e}^{bt}f(t)\right](p)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{bt}f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-(p-b)t}\,\mathrm{d}t=L(f)(p-b)$;

d) pentru $n=1: L(f')(p)=\int_0^\infty f'(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t=f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\Big|_{t=0}^{t=\infty}+$

$$+ p\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = pL(f)(p) - f(0+),$$

deoarece din (7.13) rezultă $|f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}|\leqslant M\exp[(r-\operatorname{Re}p)t]\to 0$ cînd $t\to\infty$ dacă $\operatorname{Re}p>r$; pentru $n>1$, se poate aplica inducția;

e) dacă f este funcție original, atunci și $t^nf(t)$ este funcție original pentru orice $n\in\mathbb{N}$ și deoarece $L(f)$ este analitică pentru $\operatorname{Re}p>c$, va admite derivate de orice ordin pentru $\operatorname{Re}p>c$; se obține

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty f(t)\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}(\mathrm{e}^{-pt})\,\mathrm{d}t=(-1)^n\int_0^\infty t^nf(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t;$$

f) pentru $n=1$, notînd $\int_0^t f(x)\mathrm{d}x=g(t)$, avem $g'=f$ și $g(0+)=0$; din d) va rezulta $L(f)(p)=L(g')(p)=pL(g)(p)-g(0+)=$

$$=pL\left(\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right),\ \text{adică}\ L\left(\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{p}L(f)(p).$$

Dacă $n>1$, se iterează procedeul anterior.

g) rezultă din e) pentru $n=1:\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}L(g)(p)=-L[\mathrm{tg}(t)](p)$; notînd $tg(t)=f(t)$ și integrînd, se obține

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right](p)=-\int_{+\infty}^p L(f)(q)\,\mathrm{d}q=\int_p^{+\infty}L(f)(q)\,\mathrm{d}q,$$

deoarece la infinit transformarea Laplace este nulă.

În teorema de mai sus sînt cuprinse cele mai importante proprietăți ale transformării Laplace, care stau la baza calculului operațional (vezi cap. 8); mai există și alte proprietăți cum ar fi *teorema de întîrziere* și *teorema de convoluție*, aceasta din urmă fiind transpunerea la transformarea Laplace a teoremei de convoluție de la transformarea Fourier.

Teorema de întîrziere se referă la transformarea Laplace a lui $f(t-t_0)$, $t_0>0$; vom putea scrie

$$L[f(t-t_0)](p)=\int_0^\infty f(t-t_0)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t\underset{t-t_0=x}{=}\int_{-t_0}^\infty f(x)\,\mathrm{e}^{-p(x+t_0)}\,\mathrm{d}x=$$

$$=\int_{-t_0}^0 f(x)\mathrm{e}^{-px}\cdot\mathrm{e}^{-pt_0}\,\mathrm{d}x+\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt_0}f(x)\,\mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}x=$$

$$=\mathrm{e}^{-pt_0}\,L(f)(p)+\mathrm{e}^{-pt_0}\int_{-t_0}^0\mathrm{e}^{-pt}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ultima expresie se simplifică dacă ținem seama că pentru funcții original f avem $f(t)=0$ dacă $t<0$ și atunci se obține egalitatea

$$L[f(t-t_0)](p)=\mathrm{e}^{-pt_0}L(f)(p),\ t_0>0. \tag{7.16}$$

În cazul teoremei de convoluție, vom obține egalitatea

$$L(f*g)=L(f)\cdot L(g). \tag{7.17}$$

Aici, în cazul în care f și g sînt funcții original, expresia convoluției se scrie sub forma

$$(f*g)(x)=\int_0^x f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x f(x-t)g(t)\mathrm{d}t,$$

deoarece avem

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(x-t)\mathrm{d}t=\left(\int_{-\infty}^0+\int_0^x+\int_x^{+\infty}\right)f(t)g(x-t)\mathrm{d}t$$

iar prima integrală este nulă [deoarece $f(t)=0$ pentru $t<0$] ca și ultima [deoarece $g(x-t)=0$ pentru $x-t<0$, deci pentru $t>x$].

Relaţia (7.17) se deduce imediat prin calcul:

$$L(f*g)(p) = \int_0^\infty e^{-px}(f*g)(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-px}\left(\int_0^x f(t)\,g(x-t)\,dt\right)dx =$$

$$= \int_0^\infty dx \int_0^x e^{-px} f(t)\,g(x-t)\,dt.$$

Inversînd ordinea de integrare, se obţine

$$L(f*g)(p) = \int_0^\infty dt \int_t^\infty e^{-px} f(t)\,g(x-t)\,dx = \underset{x-t=y}{}$$

$$= \int_0^\infty f(t)\,dt \int_0^\infty g(y)e^{-p(t+y)}dy = \int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt \cdot \int_0^\infty g(y)\,e^{-py}dy =$$

$$= L(f)(p)\cdot L(g)(p).$$

În aplicaţiile concrete la care se aplică transformarea Laplace nu este necesar să se calculeze de fiecare dată funcţia original din funcţia imagine (presupusă cunoscută) cu ajutorul formulei lui Mellin (7.14); se poate utiliza faptul că legătura original-imagine este biunivocă [la o funcţie original corespunde o singură imagine şi invers, după cum rezultă din (7.12) şi (7.14); dacă $f = 0$, avem $L(f) = 0$ şi dacă $L(f) = 0$, atunci $f = 0$] şi este suficient să se găsească imaginile unor funcţii original, pentru ca problema inversă (care este de fapt problema centrală) să se poată rezolva direct.

Exemplul

8. Dacă $f(t) = H(t)$, H fiind funcţia unitate (sau funcţia lui Heaviside), adică

$$H(t) = \begin{cases} 0, \text{ pentru } t < 0, \\ 1, \text{ pentru } t \geqslant 0, \end{cases}$$

rezultă $L(H)(p) = \int_0^\infty 1\cdot e^{-pt}\,dt = \frac{1}{p}$; aşadar, vom avea $L^{-1}\left(\frac{1}{p}\right)(t) = H(t)$, dacă notăm cu L^{-1} operaţia inversă transformării Laplace.

9. Dacă $f(t) = e^t$, $t \geqslant 0$, şi $f(t) = 0$, $t < 0$, va rezulta din teorema 7.7, punctul c),

$$L(e^{at})(p) = L(e^{at}\cdot 1)(p) = L(H)(p-a) = \frac{1}{p-a}$$

şi deci $L^{-1}\left(\frac{1}{p-a}\right)(t) = e^{at}$.

De fapt, în aplicaţiile transformării Laplace în teoria ecuaţiilor şi sistemelor diferenţiale este suficientă cunoaşterea teoremei 7.7 şi a faptului că $L(H)(p) = \frac{1}{p}$. De exemplu, pentru a calcula $L[t\,e^{ax}\cos(bx)](p)$ se utilizează formula lui Euler pentru cosinus şi punctele a), e) şi c) din teorema 7.7:

$$L[t\,e^{ax}\cos(bx)](p) = -\frac{d}{dp}L\left(\frac{1}{2}e^{ax+ibx} + \frac{1}{2}e^{ax-ibx}\right)(p) =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{d}{dp}L\left[e^{(a+ib)x}\cdot 1\right](p) - \frac{1}{2}\frac{d}{dp}L[e^{(a-ib)x}\cdot 1](p) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dp}L[H(t)](p-a-ib) + \frac{1}{2}\frac{d}{dp}L[H(t)](p-a+ib) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p-a-ib} + \frac{1}{p-a-ib}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dp}\frac{2(p-a)}{(p-a)^2+b^2} =$$

$$= \frac{b^2-(p-a)^2}{[(p-a)^2+b^2]^2}.$$

Dăm tabelul transformărilor Laplace pentru cîteva funcţii importante în aplicaţii:

Funcţia original	Funcţia imagine	Funcţia original	Funcţia imagine
x^a, Re$a > -1$	$\dfrac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$	$x\sin(\alpha x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$	$\dfrac{2\alpha p}{(p^2+\alpha^2)^2}$
$\exp(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{C}$	$\dfrac{1}{p-\lambda}$	$x\cos(\alpha x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$	$\dfrac{p^2-\alpha^2}{(p^2+\alpha^2)^2}$
$\sin(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$	$\dfrac{\lambda}{p^2+\lambda^2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}} e^{-ax}, a \in \mathbb{R}_+$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p+a}}$
$\cos(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$	$\dfrac{p}{p^2+\lambda^2}$	$x^a e^{-bx}$, Re $a > -1$	$\dfrac{\Gamma(a+1)}{(p+b)^{a+1}}$
$\mathrm{sh}(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$	$\dfrac{\lambda}{p^2-\lambda^2}$	$\dfrac{1-e^{ax}}{x}$	$\ln\dfrac{p-a}{p}$
$\mathrm{ch}(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$	$\dfrac{p}{p^2-\lambda^2}$	e^{-x^2}	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left(\dfrac{p^2}{4}\right)\mathrm{erfc}\left(\dfrac{p}{2}\right)$
$\sin^2(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$	$\dfrac{2\lambda^2}{p(p^2+4\lambda^2)}$	$J_0(a\sqrt{x})$	$\dfrac{1}{p}\exp\left(-\dfrac{a^2}{4p}\right)$
$\cos^2(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$	$\dfrac{p^2+2\lambda^2}{p(p^2+4\lambda^2)}$	$J_\nu(x)$, Re$\nu > -1$	$\dfrac{(\sqrt{p^2+1}-p)^\nu}{\sqrt{p^2+1}}$
$\mathrm{sh}^2(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$	$\dfrac{2\lambda^2}{p(p^2-4\lambda^2)}$	$x^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(a\sqrt{x})$, Re$\nu > -1$	$\dfrac{a^\nu}{2^\nu p^{\nu+1}}\exp\left(-\dfrac{a^2}{4p}\right)$
$\mathrm{ch}^2(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$	$\dfrac{p^2-2\lambda^2}{p(p^2-2\lambda^2)}$	$\sin(a\sqrt{x})$	$\dfrac{a^\nu}{2\sqrt{p^3}}\exp\left(-\dfrac{a^2}{4p}\right)$
$\mathrm{sh}(\lambda x) - \sin(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$	$\dfrac{2\lambda^3}{p^4-\lambda^4}$	$\mathrm{sh}(2\sqrt{x})$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{p^3}}\exp\left(\dfrac{1}{p}\right)$
$\mathrm{sh}(\lambda x) + \sin(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$	$\dfrac{2\lambda p^2}{p^4-\lambda^4}$		
$e^{\alpha x}\sin(\beta x)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$	$\dfrac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$		
$e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$	$\dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$		

7.3. Transformările Fourier şi Laplace şi teoria distribuţiilor

În 7.1 şi 7.2 s-au prezentat principalele proprietăţi ale transformării Fourier şi ale transformării Laplace care permit utilizarea acestor operaţii în multe domenii ale matematicii actuale; totuşi utilizarea acestora în cadrul obişnuit al funcţiilor este oarecum limitată deoarece aceste transformări nu sînt definite pentru orice funcţii absolut integrabile. Astfel, pentru funcţiile $f(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$, transformarea Fourier nu are sens, după cum nu are sens transformarea Laplace inversă pentru funcţia p^n, $n \in \mathbb{N}$.

Domeniul de aplicabilitate al acestor transformări se poate lărgi mult dacă mulţimea de definiţie, ca şi mulţimea transformatelor respective este considerată o mulţime de distribuţii definite convenabil de la transformare la transformare, înţelegînd prin *distribuţie* orice funcţională liniară şi continuă pe un spaţiu convenabil definit de funcţii test.

7.3.1. Transformarea Fourier a distribuţiilor

Fie $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ mulţimea funcţiilor indefinit derivabile $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, astfel încît pentru orice $j, k \in \mathbb{Z}_+$ să avem $\lim\limits_{|x|\to\infty} |x^j \varphi^{(k)}(x)| = 0$; aceasta implică mărginirea funcţiei $x^j\varphi^{(k)}(x)$ în orice interval al axei $\mathbb{R}$ şi reciproc. Notînd

$$|\varphi|_{j,k,I} = \sup\{x^j \varphi^{(k)}(x) | \ x \in I = [a, b]\}, \tag{7.18}$$

rezultă $|\varphi|_{j,k,I} < \infty$ dacă $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ şi reciproc, dacă $|\varphi|_{j,k,I}$ definit prin (7.18) este finit pentru orice $j, k \in \mathbb{Z}_+$, orice $I = [a, b]$ şi un $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, atunci $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Mulţimea $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ formează un spaţiu vectorial, adică $a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 \in \mathcal{S}$ dacă $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}$ iar $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$; în plus, se verifică uşor relaţiile

$$|c\varphi|_{j,k,I} = c|\varphi|_{j,k,I}, \quad |\varphi_1 + \varphi_2|_{j,k,I} \leqslant |\varphi_1|_{j,k,I} + |\varphi_2|_{j,k,I}$$

pentru orice $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}$ şi orice $c \in \mathbb{C}$.

Un şir $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathcal{S}$ se spune că este convergent în sensul lui $\mathcal{S}$ către $\varphi \in \mathcal{S}$ dacă $|\varphi_n - \varphi|_{j,k,I} \to 0$ cînd $n \to \infty$ şi se notează

$$\varphi_n \to \varphi \ (\mathcal{S})$$

iar șirul în cauză va fi un șir fundamental (sau șir Cauchy) în sensul lui $\mathscr{S}$ dacă

$$|\varphi_n - \varphi_m|_{j,k,I} \to 0 \text{ cînd } n, m \to \infty.$$

Se poate arăta că șirurile convergente în sensul lui $\mathscr{S}$ sînt și șiruri fundamentale în sensul lui $\mathscr{S}$ și reciproc. Cu alte cuvinte, spațiul funcțiilor test $\mathscr{S}$ definit anterior este un spațiu complet în raport cu convergența definită prin expresiile (7.18). În plus, pe baza rezultatelor din 7.1, se poate afirma că transformarea Fourier aplică biunivoc spațiul $\mathscr{S}$ în el însuși.

O aplicație $f : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$ care verifică egalitățile

$$f(c\varphi) = cf(\varphi), \quad f(\varphi_1 + \varphi_2) = f(\varphi_1) + f(\varphi_2)$$

pentru orice $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{S}$ și orice $c \in \mathbb{C}$ se numește *funcțională liniară* definită pe spațiul $\mathscr{S}$; funcționala liniară f se spune că este *continuă* pe $\mathscr{S}$ dacă din $\varphi_n \to \varphi$ $(\mathscr{S})$ rezultă $f(\varphi_n) \to f(\varphi)$ (convergență de numere complexe).

Mulțimea tuturor funcționalelor continue definite pe $\mathscr{S}$ se notează $\mathscr{S}'(= \mathscr{S}'(\mathbb{R}))$ și se numește mulțimea *distribuțiilor* definite pe $\mathscr{S}$; orice element din $\mathscr{S}'$ se numește *distribuție de tipul* $\mathscr{S}'$ (sau *distribuție temperată*).

Se obișnuiește să se scrie funcționala f și sub forma

$$f(\varphi) = \langle f, \varphi \rangle, \tag{7.19}$$

în ipoteza $f \in \mathscr{S}'$ iar $f(\varphi)$ (sau $\langle f, \varphi \rangle$) poartă denumirea de valoarea funcționalei (distribuției) f pentru funcția-test $\varphi \in \mathscr{S}$.

Orice funcție absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$ (f este absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$ dacă $\int_{-\infty}^{+\infty} |f| dx < \infty$) definește o distribuție temperată. De pildă, acele funcții absolut integrabile f care verifică inegalități de forma $|f(x)| \leqslant A\ |x|^n$ pentru $|x| \to \infty$, $A \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$; în acest caz, funcționala corespunzătoare va fi

$$\langle f, \varphi \rangle = f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}\ \varphi(x) dx \tag{7.20}$$

iar integrala va fi convergentă, deoarece $|\overline{f(x)}\ \varphi(x)| \leqslant A\,|x|^n\,|\varphi(x)|$, iar cum $|\varphi(x)| \leqslant \dfrac{B}{|x|^{n+2}}$, va rezulta $|\overline{f(x)}\ \varphi(x)| \leqslant \dfrac{AB}{x^2}$ pentru $|x| \to \infty$ și deci ultima integrală va fi convergentă pentru orice $\varphi \in \mathscr{S}$.

Se poate arăta ușor că (7.20) definește o funcțională liniară și continuă pe $\mathscr{S}$.

Orice element $f \in \mathscr{S}'$ admite derivate de orice ordin care sînt elemente din $\mathscr{S}'$, dacă se definește derivata întîi prin egalitatea

$$f'(\varphi) = -f(\varphi') \text{ sau } \langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle. \tag{7.21}$$

În aceste condiții, dacă $f \in \mathscr{S}'$, funcționala liniară și continuă $g \in \mathscr{S}'$ definită prin

$$\langle g, \hat{\varphi} \rangle = 2\pi \langle f, \varphi \rangle \tag{7.22}$$

se numește *transformarea Fourier a distribuției* $f \in \mathscr{S}'$ și se notează $g = \hat{f}$.

Relația (7.22) se mai poate scrie și sub forma echivalentă

$$g(\hat{\varphi}) = 2\pi f(\varphi), \ \varphi \in \mathscr{S}. \tag{7.22'}$$

Liniaritatea și continuitatea lui $g = \hat{f}$ se deduc imediat din egalitatea (7.22), deoarece f fiind o distribuție este o funcțională liniară și continuă. Rezultă că (7.22) se mai poate scrie și sub forma $\langle \hat{f}, \hat{\varphi} \rangle = 2\pi \langle f, \varphi \rangle$ sau chiar sub formele

$$\langle \hat{f}, \psi \rangle = 2\pi \langle f, F^{-1}(\psi) \rangle, \ \psi \in \mathscr{S}, \ \langle g, \psi \rangle = 2\pi \langle F^{-1}(g), F^{-1}(\psi) \rangle,$$

notînd prin F operatorul de transformare Fourier iar prin F^{-1} înțelegîndu-se operatorul invers; deci $\hat{f} = F(f) \Leftrightarrow f = F^{-1}(\hat{f})$.

Așadar, transformarea Fourier a unei distribuții $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ este o funcțională a cărei valoarea pentru orice element $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ este egală cu valoarea funcționalei inițiale, înmulțită cu 2π, pentru elementul $\varphi = F^{-1}(\psi)$; iar deoarece operația F este o aplicație bijectivă, cînd φ parcurge $\mathscr{S}$, atunci aceeași proprietate o are și $\psi = F(\varphi)$ și deci $g = F(f)$ este definită pe întreg spațiul funcțiilor-test în cauză.

Este evident că toate funcţiile din $L_1(\mathbb{R})$ sînt elemente ale lui $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ iar pentru aceste elemente are sens noţiunea de transformare Fourier în sens obişnuit; este uşor de verificat că transformarea Fourier în sens obişnuit coincide cu transformarea Fourier în sensul distribuţiilor [nu avem decît să ne amintim că de fapt relaţia de definiţie (7.22) nu este decît egalitatea (7.10)].

Exemple

10. Distribuţia lui Dirac δ se defineşte prin $\delta(\alpha) = \varphi(0)$, $\varphi \in \mathscr{S}$; atunci

$$\langle \hat{\delta}, \psi \rangle = 2\pi \langle \delta, F^{-1}(\psi) \rangle = 2\pi F^{-1}(\psi)(0) = 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) e^{-i\xi x} d\xi \Big|_{x=0} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) d\xi = \langle 1, \psi \rangle$$

şi deci $\hat{\delta} = F(\delta) = 1$; altfel scris, rezultă $\delta = F^{-1}(1)$ sau $F(1) = 2\pi\delta$, deoarece se poate scrie egalitatea $F(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} f(x) dx = 2\pi \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(-\xi)x} f(x) dx \right] =$

$= 2\pi F^{-1}(f)(-\xi)$.

11. Dacă $f(x) = c \in \mathbb{C}$, atunci nu există transformarea Fourier în sens clasic; dar există transformarea Fourier în sensul distribuţiilor iar

$$F(c) = c \cdot 2\pi\delta,$$

δ fiind distribuţia lui Dirac, deoarece $F(c) = F(c \cdot 1) = cF(1) = c \cdot 2\pi\delta$.

12. Dacă $f(x) = x$, $F(f)$ nu există în sens obişnuit, dar va exista în sensul teoriei distribuţiilor; într-adevăr, din definiţie, va rezulta (pentru $\hat{\delta}'$):

$$\langle \hat{\delta}', \psi \rangle = 2\pi \langle \delta', \varphi \rangle = -2\pi \varphi(0) =$$

$$= -\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) e^{-i\xi x} d\xi \Big|_{x=0} = i \int_{-\infty}^{+\infty} \xi\psi(\xi) d\xi = \langle -i\xi, \psi \rangle$$

şi deci $\hat{\delta}' = -i\xi$, ceea ce este totuna cu a scrie

$$F^{-1}(\xi) = i\delta' \text{ sau } F(f) = 2\pi i\delta', \text{ dacă } f(x) = x.$$

13. Fie $f(x) = e^{iax}$, $a \in \mathbb{R}$; avem

$$2\pi \langle f, \varphi \rangle = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(x) \varphi(x) dx = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iax} \varphi(x) dx = 2\pi \hat{\varphi}(-a) =$$

$$= 2\pi\psi(-a) = 2\pi \langle \delta(\xi + a), \psi(\xi) \rangle$$

şi deci

$$F(e^{iax})(\xi) = 2\pi\delta(\xi + a).$$

Se poate arăta că toate formulele demonstrate pentru cazul ordinar sînt valabile şi pentru transformarea Fourier a distribuţiilor.

De observat că este posibilă definirea transformărilor Fourier şi pentru distribuţiile din $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, unde în $\mathscr{D}'$ sînt cuprinse toate funcţionalele liniare şi continue, definite pe spaţiul $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ al funcţiilor indefinit derivabile şi cu suport compact în $\mathbb{R}$; pentru aceasta se urmează modelul indicat mai sus pentru spaţiul $\mathscr{S}$, diferenţa constînd din faptul că $F(\mathscr{D})$ nu este $\mathscr{D}$, ci un alt spaţiu format cu funcţii analitice $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ care verifică inegalităţi de forma

$$|z|^n |\psi(z)| \leqslant C_n e^{a|y|}, \; y = \operatorname{Im} z, \; n \in \mathbb{N}.$$

Notînd acest spaţiu prin $\mathscr{Z}$, avem $F(\mathscr{D}) = \mathscr{Z}$ şi atunci, dacă $\varphi \in \mathscr{D}$, $\hat{\varphi} \in \mathscr{Z}$ iar dacă $f \in \mathscr{D}'$, vom presupune $\hat{f} \in \mathscr{Z}'$ definit prin aceeaşi egalitate (7.22): $\langle \hat{f}, \psi \rangle = 2\pi \langle f, \varphi \rangle$, cu $\psi = F(\varphi)$.

Convergenţa în spaţiul funcţiilor test $\mathscr{Z}$ se defineşte astfel:

Dacă $\varphi_n \to \varphi(\mathscr{D})$, atunci $F(\varphi_n) \to F(\varphi)(\mathscr{Z})$ sau, cu alte cuvinte, $\psi_n \to \psi(\mathscr{Z})$, dacă $\varphi_n = F^{-1}(\psi_n) \to \varphi = F^{-1}(\psi)$.

Evident, aceeaşi construcţie a transformării Fourier este valabilă pentru orice alt spaţiu de funcţii-test: dacă $\mathscr{A}$ este un spaţiu de funcţii-test căruia îi corespunde spaţiul distribuţiilor $\mathscr{A}'$, transformarea Fourier pentru o distribuţie din $\mathscr{A}'$ va fi o funcţională liniară şi continuă pe $F(\mathscr{A})$, deci $F(\mathscr{A}') = F(\mathscr{A})'$.

7.3.2. Transformarea Laplace a distribuţiilor

Pentru a putea defini transformarea Laplace a distribuţiilor se urmează schema de la 7.3.1, definindu-se un spaţiu convenabil de funcţii-test pe care-l vom nota prin $\mathscr{L}$, iar $\varphi \in \mathscr{L}$ dacă φ

este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, iar $\lim_{t\to\infty} e^{at}\,\varphi^{(k)}(t) = 0$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$ și orice $k \in \mathbb{N}$.

Această definiție este echivalentă cu următoarea:

Pentru orice $k \in \mathbb{N}$, orice $a \in \mathbb{R}$ și orice $M \in \mathbb{R}_+$, funcția $e^{at}\varphi^{(k)}(t)$ este mărginită pe intervalul $[M, +\infty[$.

De aici va rezulta că $\varphi \in \mathscr{L}$ dacă și numai dacă pentru orice k, a și M (cu semnificațiile anterioare) numărul real negativ $|\varphi|_{k,a,M} = \sup\{e^{at}|\varphi^{(k)}(t)| \mid t \in [M, +\infty[\}$ este finit.

Mulțimea $\mathscr{L}$ formează un spațiu liniar și, în plus,

$$|c\varphi|_{k,a,M} = |c|\,|\varphi|_{k,a,M}, |\varphi_1 + \varphi_2|_{k,a,M} \leqslant |\varphi_1|_{k,a,M} + |\varphi_2|_{k,a,M}$$

pentru orice $c \in \mathbb{C}$ și orice elemente φ din $\mathscr{L}$.

Se poate defini noțiunea de șir convergent și noțiunea de șir fundamental în $\mathscr{L}$, exact la fel ca la 7.3.1, dar cu înlocuirile corespunzătoare, aceste două noțiuni fiind echivalente; vom nota această convergență prin $\varphi_n \to \varphi\ (\mathscr{L})$.

Se pot justifica ușor următoarele proprietăți: dacă $\varphi \in \mathscr{L}$,

$\varphi^{(k)} \in \mathscr{L}$, $k \in \mathbb{N}$; Re $\varphi \in \mathscr{L}$;

$(T_s\varphi)(t) = \varphi(t-s) \in \mathscr{L}$; Im $\varphi \in \mathscr{L}$,

$\overline{\varphi} \in \mathscr{L}$; $\int_t^\infty \varphi(x)\,dx \in \mathscr{L}$.

Din spațiul $\mathscr{L}$ nu face parte funcția exponențială e^{-zt}, $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$, dacă z este arbitrar, deoarece dacă Re $z<0$, atunci $|e^{-zt}|$ nu este mărginit cînd $t \to +\infty$.

Prin definiție, spațiul $\mathscr{L}'$ este mulțimea funcționalelor liniare și continue definite pe $\mathscr{L}$ și orice element din $\mathscr{L}'$ poartă denumirea de *distribuție de tip* $\mathscr{L}'$.

Distribuția δ se definește în același mod ca anterior:

$$\delta(\varphi) = \varphi(0) \qquad (\text{sau } \langle\delta, \varphi\rangle = \varphi(0)),$$

peci $\delta \in \mathscr{L}'$.

Funcția e^{zt} nu este un element din $\mathscr{L}$, dar poate fi considerat un element din $\mathscr{L}'$, funcționala corespunzătoare fiind

$$f(\varphi) = \int_0^\infty e^{zt}\varphi(t)\,dt;$$

se observă că ultima integrală este uniform convergentă pentru orice $z \in \mathbb{C}$ datorită faptului că funcția-test φ are o comportare convenabilă la infinit.

Alte elemente din $\mathscr{L}'$ se obțin cu ajutorul funcțiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, unde $f(t)=0$ dacă $t \leqslant M$ și $e^{-at}f(t)$ este mărginit pentru $t \to +\infty$; distribuția corespunzătoare este determinată prin funcționala

$$f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)\,dt = \int_M^{+\infty} f(t)\varphi(t)\,dt,$$

care este convergentă, deoarece

$$|f(t)\varphi(t)| = |e^{-at}f(t)||e^{(a-a')t}||e^{a't}\varphi(t)| \leqslant c\,|\varphi|_{0,a'M}\,e^{(a-a')t}$$

și dacă $a - a' < 0$, convergența integralei este asigurată.

Derivata oricărei distribuții $f \in \mathscr{L}'$ se definește în mod analog cu situațiile anterioare:

$$f'(\varphi) = -f(\varphi')$$

și rezultă $f', f'', \ldots, f^{(k)}, \ldots \in \mathscr{L}'$; în plus supp $f \subset [M, +\infty[$ dacă $f \in \mathscr{L}'$, unde supp f este suportul lui f: supp $f = \overline{\{x \mid x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0\}}$.

Transformarea Laplace $L(f)$ pentru $f \in \mathscr{L}'$ se definește cu ajutorul relației

$$L(f) = f(e^{-pt}) = \langle f, e^{-pt}\rangle; \tag{7.23}$$

deși $e^{-pt} \notin \mathscr{L}$ pentru orice $p \in \mathbb{C}$, funcționala are sens deoarece se poate determina un șir $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathscr{L}$, $v_n \to e^{-pt}\ (\mathscr{L})$ pentru p constant) și atunci, în baza continuității lui f, vom avea

$$\langle f, e^{-pt}\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle f, v_n\rangle$$

iar limita nu depinde de șirul ales.

Proprietățile transformării Laplace pentru distribuții sînt identice cu cele ale transformării Laplace pentru funcții, cu unele diferențe datorite noțiunii de distribuție.

Astfel, dacă f este funcție, avem

$$L(f')(p) = pL(f)(p) - f(0+),$$

dar dacă f este distribuţie, în baza calculelor următoare :

$$L(f') = \langle f', e^{-pt}\rangle = -\langle f, -p\, e^{-pt}\rangle = \langle pf, e^{-pt}\rangle = pf(e^{-pt}) = pL(f)$$

rezultă

$$L(f')(p) = pL(f),$$

deci nu apare termenul suplimentar $-f(0+)$; acest fapt se explică prin aceea că în cazul distribuţiilor nu au sens valorile unei distribuţii în puncte date, dar dacă f este distribuţia regulată, provenind dintr-o funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $f(t)=0$, dacă $t<0$, atunci în expresia derivatei în sensul teoriei distribuţiilor, după cum se ştie, apare şi saltul în origine care este egal cu $-f(0+)$.

În plus, avem posibilitatea să calculăm şi transformate Laplace pentru distribuţii care nu provin din funcţii, cum ar fi distribuţia δ şi derivatele ei. Avem

$$L(\delta)(p) = \langle \delta, e^{-pt}\rangle = e^{-pt}\,|_{t=0} = 1,$$

$$L(\delta')(p) = \langle \delta', e^{-pt}\rangle = -\langle \delta, -p\, e^{-pt}\rangle = +p\, e^{-pt}\,|_{t=0} = p$$

şi în general $L(\delta^{(k)})(p) = p^k$.

Prin urmare, rezultă, notînd L^{-1} transformarea Laplace inversă, egalităţile următoare, care nu au sens în cazul funcţiilor :

$$L^{-1}(1) = \delta,\ L^{-1}(p) = \delta',\ \ldots,\ L^{-1}(p^k) = \delta^{(k)}$$

şi care apar uneori în calcule (vezi capitolul următor).

CAPITOLUL 8

Calculul operaţional

Calculul operaţional este constituit dintr-un număr de reguli şi formule care permit rezolvarea unor probleme impuse unor ecuaţii (diferenţiale, integrale, cu diferenţe finite, cu derivate parţiale etc.) cu ajutorul unor operaţii matematice simple. În acest scop se folosesc anumite proprietăţi ale transformării Fourier sau Laplace; astfel, conform cu teorema 7.7, operaţiei de derivare în mulţimea funcţiilor original îi corespunde operaţia de înmulţire cu p, operaţiei de înmulţire cu o exponenţială îi corespunde o translaţie etc. Astfel, la operaţii „mai complicate" dintr-un spaţiu i se pun în corespondenţă operaţii „mai simple" dintr-un alt spaţiu, convenabil ataşat primului spaţiu.

În linii mari, metodele calculului operaţional permit transformarea unei ecuaţii (diferenţiale, integrale, cu derivate parţiale etc.) într-o ecuaţie algebrică, prin aplicarea unei transformări date; apoi rezolvîndu-se ecuaţia algebrică, prin aplicarea transformării inverse primei transformări se obţine soluţia dorită pentru ecuaţia iniţială.

Vom prezenta cîteva cazuri curente privind aplicarea metodelor calculului operaţional.

8.1. Ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

Fie ecuaţia diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = f,\ a_k \in \mathbb{C},\ f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{C},\ y^{(k)} = \frac{d^k y}{dt^k},\ k = 0, \ldots, n, \qquad (8.1)$$

și condițiile inițiale

$$y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{C}. \quad (8.2)$$

Trebuie rezolvată problema determinării acelei soluții a ecuației (8.1) care verifică (8.2).

Aplicînd transformarea Laplace în ambii membri ai ecuației (8.1), deoarece

$$L[y^{(k)}](p) = p^k L(y)(p) - p^{k-1} y(0+) - p^{k-2} y'(0+) - \ldots$$

$$\ldots - p y^{(k-2)}(0+) - y^{(k-1)}(0+),$$

notînd $L(y) = Y$, $L(f) = F$ (în ipoteza că f și y sînt funcții original), din (8.1) și (8.2) se obține ecuația

$$\left(\sum_k a_k p^k\right) Y - \sum_k a_k \left(p^{k-1} y_0 + p^{k-2} y_1 + \ldots + p\, y_{k-2} + y_{k-1}\right) = F$$

care poate fi interpretată ca o ecuație de gradul întîi în necunoscuta Y; rezolvînd-o găsim

$$Y = Y(p) = y_0 \frac{a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \ldots + a_2 p + a_1}{P(p)} +$$

$$+ y_1 \frac{a_n p^{n-2} + a_{n-1} p^{n-3} + \ldots + a_3 p + a_2}{P(p)} + \ldots$$

$$\ldots + y_{n-2} \frac{a_n p + a_{n-1}}{P(p)} + y_{n-1} \frac{a_n}{P(p)} + \frac{1}{P(p)} \cdot F(p) \quad (8.3)$$

prin utilizarea notației

$$P(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0. \quad (8.4)$$

Se constată deci că P definit prin (8.4) este un polinom de gradul n (dacă $a_n \neq 0$, ceea ce se presupune întotdeauna) care se numește *polinomul caracteristic* al ecuației (8.1) iar acest polinom joacă un rol esențial în determinarea soluției problemei Cauchy (8.2) pentru ecuația (8.1), el fiind acela care determină structura soluțiilor problemei în studiu.

Pentru a exprima cît mai simplu soluția căutată prin termenul liber f și prin datele inițiale (8.2), vom nota cu g soluția ecuației (8.1) în care $f = 0$ iar condițiile inițiale (8.2) au forma particulară următoare :

$$g(0) = g'(0) = \ldots = g^{(n-2)}(0) = 0, \; g^{(n-1)}(0) = \frac{1}{a_n}, \quad (8.2')$$

cu alte cuvinte, g este soluție a ecuației omogene corespunzătoare ecuației diferențiale (8.1), care verifică datele inițiale (8.2').

Deoarece $F = 0$ și $y_0 = \ldots = y_{n-2} = 0$, $y_{n-1} = \frac{1}{a_n}$, din (8.3)

rezultă egalitatea

$$G(p) = \frac{1}{P(p)} \quad \text{dacă} \quad G = L(g)$$

și deci

$$g(t) = L^{-1}(G)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{pt}}{P(p)}\, dp,$$

unde a este un număr real oarecare astfel încît să avem $a > \operatorname{Re} p_j$, p_j fiind zerourile polinomului caracteristic (8.4).

În bata teoremei 7.7, vom putea scrie egalitățile

$$L^{-1}\left[\frac{p}{P(p)}\right](t) = L^{-1}[pG(p)]\,(t) = g'(t) + g(0+) =$$

$$= g'(t) \quad [\text{deoarece } g(0+) = g(0) = 0],$$

$$L^{-1}\left[\frac{p^2}{P(p)}\right](t) = L^{-1}\,[p^2 G(p)]\,(t) = g''(t) + pg(0+) + g'(0+) =$$

$$= g''(t) \quad [\text{deoarece } g'(0+) = g'(0) = 0],$$

. . . . . .

$$L^{-1}\left[\frac{p^{n-1}}{P(p)}\right](t) = L^{-1}[p^{n-1}G(p)](t) = g^{(n-1)}(t) + p^{n-2} g(0+) + \ldots$$

$$\ldots + g^{(n-2)}\,(0+) = g^{(n-1)}(t) \quad [\text{deoarece } g^{(n-2)}\,(0+) = 0],$$

$$L^{-1}\left[\frac{p^n}{P(p)}\right](t) = L^{-1}\left[p^n G(p)\right](t) = g^{(n)}(t) + p^{n-1} g(0+) + \ldots$$

$$\ldots + p g^{(n-2)}(0+) + g^{(n-1)}(0+) =$$

$$= g^{(n)}(t) + \frac{1}{a_n}\left[\text{deoarece } g^{(n-1)}(0+) = \frac{1}{a_n}\right].$$

Ţinînd acum seama de expresia (8.3) şi de relaţiile anterioare, rezultă, utilizînd şi teorema de convoluţie, următoarea expresie pentru soluţia problemei (8.1), (8.2) :

$$y(t) = y_0\left[a_n g^{(n-1)}(t) + a_{n-1} g^{(n-2)}(t) + \ldots + a_2 g'(t) + a_1 g(t)\right] +$$

$$+ y_1\left[a_n g^{(n-2)}(t) + a_{n-1} g^{(n-3)}(t) + \ldots + a_2 g(t)\right] + \ldots$$

$$\ldots + y_{n-2}\left[a_n g'(t) + a_{n-1} g(t)\right] + a_n y_{n-1} g(t) + \int_0^t g(t-x) f(x)\,\mathrm{d}x, \quad (8.5)$$

ultimul termen fiind evident funcţia original pentru funcţia imagine

$$\frac{1}{P(p)} F(p) = G(p)\,F(p) = \left[L(g)\cdot L(f)\right](p).$$

Din (8.5) se constată direct că dacă se determină funcţia g, atunci soluţia problemei în studiu se exprimă cu ajutorul acestei funcţii, a derivatelor ei succesive pînă la ordinul $n-1$ precum şi cu ajutorul coeficienţilor ecuaţiei (8.1), a termenului liber şi a condiţiilor iniţiale.

Datorită rolului important pe care-l joacă funcţia g definită mai sus, vom numi această soluţie *funcţia Green* pentru problema Cauchy (8.2) ataşată ecuaţiei (8.1) (uneori se mai numeşte şi *soluţie elementară* sau *soluţie fundamentală*). Această soluţie depinde numai de coeficienţii ecuaţiei (8.1) şi nu depinde de termenul liber f sau de condiţiile iniţiale (8.2), ceea ce înseamnă că odată găsită funcţia Green a problemei Cauchy pentru ecuaţia (8.1) se poate rezolva orice problemă Cauchy (8.2) pentru orice membru drept f.

Se poate găsi efectiv soluţia g, dacă se descompune transformata ei Laplace $G(p) = \dfrac{1}{P(p)}$, care este o funcţie raţională, în funcţii raţionale simple; deoarece avem

$$P(p) = a_n(p-p_1)^{n_1}(p-p_2)^{n_2}\ldots(p-p_m)^{n_m}$$

cu $p_j \in \mathbb{C}$, $n_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$, funcţiile raţionale simple pentru funcţia raţională $G(p) = \dfrac{1}{P(p)}$ vor fi

$$G(p) = \frac{1}{P(p)} = \sum_{j=1}^{m}\left[\frac{A_{1j}}{p-p_j} + \frac{A_{2j}}{(p-p_j)^2} + \ldots + \frac{A_{njj}}{(p-p_j)^{nj}}\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\left[\frac{A_{1j}}{p-p_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{A_{2j}}{p-p_j}\right) + \ldots + (-1)^{nj-1}\frac{\mathrm{d}^{nj-1}}{\mathrm{d}p^{nj-1}}\left(\frac{A_{njj}}{p-p_j}\right)\right],$$

ceea ce conduce la forma lui $g(t)$:

$$g(t) = \sum_{j=1}^{m}\left[A_{1j}\,\mathrm{e}^{p_j t} + A_{2j}\,t\,\mathrm{e}^{p_j t} + \ldots + A_{njj}\,t^{nj-1}\,\mathrm{e}^{p_j t}\right].$$

Aşadar, funcţia Green g ataşată ecuaţiei (8.1) este o combinaţie liniară de exponenţiale sau de exponenţiale înmulţite cu puteri convenabil alese ale lui t (astfel de funcţii elementare se numesc *cvasipolinoame*); atît exponenţialele cît şi puterile în cauză sînt determinate cu ajutorul polinomului caracteristic (8.4) în modul următor : zerourile polinomului caracteristic determină exponenţialele din expresia lui g iar ordinele de multiplicitate ale acestor zerouri determină puterile lui t care înmulţesc exponenţialele corespunzătoare.

Se poate face observaţia că dacă coeficienţii ecuaţiei (8.1) sînt numere reale, atunci soluţia g poate fi obţinută cu ajutorul unor funcţii reale; într-adevăr, în această situaţie, zerourile polinomului caracteristic (8.4) pot fi atît numere reale cît şi numere complexe.

Dacă p_j este un zero real de ordin de multiplicitate m_j, în expresia lui g vor intra, în mod natural, funcţiile $\mathrm{e}^{p_j t}$, $t\,\mathrm{e}^{p_j t}$, $\ldots$, $t^{mj-1}\,\mathrm{e}^{p_j t}$; dacă însă $p_j \in \mathbb{C}$, atunci şi numărul complex $\bar{p}_j$ este un zero cu acelaşi ordin de multiplicitate m_j. Scriind $p_j = \alpha_j + \mathrm{i}\beta_j$, deci $\bar{p}_j = \alpha_j - \mathrm{i}\beta_j$,

vor apărea soluții cu valori complexe de forma $At^s e^{(\alpha_j+i\beta_j)t}$ și $Bt^s e^{(\alpha_j-i\beta_j)t}$ iar $B = \bar{A}$; așadar se poate scrie

$$At^s\, e^{(\alpha_j+i\beta_j)t} = At^s e^{\alpha_j t}\,[\cos(\beta_j t) + i \sin(\beta_j t)]$$

și luînd în considerare că soluția $Bt^s e^{(\alpha_j-i\beta_j)t}$ este funcția complex conjugată a funcției anterioare, suma acestor soluții va conduce la o funcție cu valori reale.

În concluzie, dacă ecuația (8.1) este cu coeficienți reali, soluția fundamentală a acesteia (deci și orice altă soluție posibilă) este o combinație liniară de funcții elementare de forma

$$e^{p_j t},\ te^{p_j t},\ \ldots,\ t^{s_j} e,\ e^{p_j t}\cos(\beta_k t),\ e^{\alpha_k t}\sin(\beta_k t),$$

$$te^{\alpha_k t}\cos(\beta_k t),\ te^{\alpha_k t}\sin(\beta_k t),\ \ldots,\ t^{s_k} e^{\alpha_k t}\cos(\beta_k t),\ t^{s_k} e^{\alpha_k t}\sin(\beta_k t),$$

$$p_j,\ \alpha_k,\ \beta_k \in \mathbb{R},\ s_j,\ s_k \in \mathbb{Z}_+.$$

Exemple

1. Să găsim funcția Green pentru problema Cauchy atașată ecuației diferențiale

$$y^{(5)} - y^{(3)} - y'' + y = 0.$$

Deoarece polinomul caracteristic corespunzător este

$$P(p) = p^5 - p^3 - p^2 + 1 = (p+1)(p-1)^2(p^2 + p + 1),$$

care admite zerourile reale $p_1 = -1$, $p_2 = 1$ (cu ordin de multiplicitate doi) și zerourile complex conjugate simple $p_{3,4} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; rezultă

$$G(p) = \frac{1}{P(p)} = \frac{1}{(p+1)(p-1)^2(p^2+p+1)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(p-1)^2} -$$

$$- \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p^2+p+1},$$

ceea ce conduce la soluția căutată

$$g(t) = \frac{1}{4}(e^{-t} - e^t) + \frac{1}{6}te^t + \frac{2\sqrt{3}}{9}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(t\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\operatorname{sh} t + \frac{1}{6}te^t + \frac{2\sqrt{3}}{9}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,t\right).$$

2. Să determinăm soluția ecuației $y'' + 4y = \sin(3t)$ care verifică datele Cauchy nule pentru $t = 0$.

Din (8.5) rezultă că soluția căutată va fi $y(t) = g(t) * \sin(3t)$ și deoarece polinomul caracteristic este $P(p) = p^2 + 4$, rezultă

$$G(p) = \frac{1}{p^2+4} = \frac{1}{(p+2i)(p-2i)} = \frac{1}{4i}\,\frac{1}{p-2i} - \frac{1}{4i}\,\frac{1}{p+2i},$$

adică

$$g(t) = \frac{1}{4i}(e^{2it} - e^{-2it}) = \frac{1}{2}\sin(2t)$$

și cum

$$\frac{1}{2}\sin(2t) * \sin(3t) = \frac{1}{2}\int_0^t \sin 2(t-x)\sin(3x)\,dx,$$

găsim $y(t) = \dfrac{3}{10}\sin(2t) - \dfrac{1}{5}\sin(3t)$.

3. Să găsim soluția ecuației $y'' - 3y' + 2y = e^{5t}$ care verifică datele Cauchy $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Deoarece aici polinomul caracteristic este $P(p) = p^2 - 3p + 2 = (p-1)(p-2)$, rezultă

$$G(p) = \frac{1}{P(p)} = \frac{1}{p-2} - \frac{1}{p-1},\ \text{deci}\ g(t) = e^{2t} - e^t$$

și înlocuind în (8.5) $y_0 = 1$, $y_1 = 2$, $f(t) = e^{5t}$, se obține

$$y(t) = 1\cdot[g'(t) - 3g(t)] + 2\cdot[g(t)] + \int_0^t g(t-x)\,e^{5x}\,dx = \frac{2}{3}e^{2t} + \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{12}e^{5t}.$$

Metoda expusă este una din cele mai comode metode de rezolvare a problemei Cauchy (8.2) pentru ecuația (8.1); avantajele metodei constă în obținerea directă a soluției ecuației neomogene care verifică datele (8.2) iar atît condițiile inițiale cît și termenul liber sînt efectiv puși în evidență pe forma finală a soluției.

Soluția (8.5) obținută anterior indică unele proprietăți fundamentale ale soluțiilor ecuațiilor liniare cu coeficienți constanți, dar (vezi cap. 9) aceste proprietăți sînt generale, fiind valabile și pentru ecuații

diferențiale liniare cu coeficienți funcții continue. Aceste proprietăți sînt :

Soluția problemei (8.2) pentru ecuația (8.1) este întotdeauna compusă din doi termeni principali. Unul din termeni reprezintă contribuția termenului liber f la soluția finală, fiind egal cu $f*g$; vom conveni să notăm cu y_p acest termen și deci $y_p = f*g$, adică

$$y_p(t) = \int_0^t f(x)\, g(t-x)\, dx \left(= \int_0^t f(t-x)\, g(x)\, dx \right). \tag{8.6}$$

Al doilea termen indică participarea condițiilor inițiale la forma finală a soluției ; notînd acest termen $y_h(t)$, din (8.5) rezultă

$$\begin{aligned} y_h(t) = {} & y_0 \left[a_n g^{(n-1)}(t) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 g(t)\right] + \\ & + y_1 \left[a_n g^{(n-2)}(t) + a_{n-1}\, g^{(n-3)}(t) + \ldots + a_2 g(t)\right] + \ldots \\ & \ldots + y_{n-2} \left[a_n g'(t) + a_{n-1}\, g(t)\right] + y_{n-1}\, a_n g(t) \end{aligned} \tag{8.7}$$

și deci, din (8.5), cu notațiile (8.6) și (8.7), găsim forma soluției ecuației (8.1)

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{8.5'}$$

Așadar, y_p reprezintă o soluție particulară a ecuației (8.1) neomogene, pe cînd y_h verifică ecuația (8.1) cu $f = 0$, adică verifică ecuația omogenă corespunzătoare ecuației (8.1) ; această ecuație este

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\, y^{(k)} = a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1\, y' + a_0\, y = 0. \tag{8.1'}$$

Într-adevăr, din (8.5)' rezultă că dacă $f = 0$, deoarece $f*g = 0$, avem $y = y_h$ iar pentru $f = 0$ ecuația (8.1) se transformă în ecuația (8.1').

Se verifică ușor că dacă $h \in C^{n+r}(\mathbb{R})$ este o soluție a ecuației (8.1'), atunci și funcțiile $h', h'', \ldots, h^{(r)}$ sînt soluții ale ecuației omogene (8.1'), deoarece

$$\sum_{k=0}^{n} a_k [h^{(j)}]^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} a_k h^{(k+j)} = \sum_{k=0}^{n} [a_k h^{(k)}]^{(j)} = \left[\sum_{k=0}^{n} a_k h^{(k)} \right]^{(j)} = 0,$$

ținînd seama de faptul că ecuația (8.1') are coeficienții constanți.

Cu această observație, se deduce imediat, din expresia lui $y_h(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, dată de (8.7), că deoarece g este o soluție a ecuației (8.1') indefinit derivabilă (deoarece funcțiile elementare cu ajutorul cărora se exprimă $y_h(t)$ sînt indefinit derivabile, chiar analitice, pe $\mathbb{R}$), derivatele $g', g'', \ldots, g^{(n-1)}$ vor verifica aceeași ecuație (8.1') și, în baza liniarității acestei ecuații, orice combinație liniară de soluții va fi iarăși o soluție a ecuației (8.1').

În concluzie, $y_h = y_h(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, definită prin (8.7), este o soluție a ecuației omogene (8.1') care verifică datele inițiale (8.2) [și în baza teoremei de unicitate a acestei soluții este singura soluție posibilă a ecuației (8.1') care verifică datele (8.2)].

În același mod se verifică direct că y_p, definit prin (8.6), verifică ecuația (8.1) și condițiile inițiale (8.2) omogene, adică $y_p^{(j)}(0) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$; într-adevăr, din (8.7) rezultă că dacă datele inițiale $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ sînt nule, atunci $y_h(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, și din (8.5') rezultă $y(t) = y_p(t)$.

Utilizînd iarăși teorema de unicitate a soluțiilor problemei Cauchy (8.2) pentru ecuația (8.1), rezultă că $y_p(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, este singura soluție a ecuației (8.1) care verifică date inițiale nule.

Așadar, se poate spune că y_p este o soluție particulară a ecuației (8.1), dar această soluție particulară nu este unic determinată dacă nu se impun condițiile inițiale corespunzătoare. Într-adevăr, notînd prin $A(y)$ operatorul diferențial liniar corespunzător ecuației (8.1), adică

$$A(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = a_n y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{n-1} + \ldots + a_1 y' + a_0 y, \tag{8.8}$$

deoarece $A(y_p) = f$, dacă z este astfel încît $A(z) = 0$, atunci

$$A(y_p + z) = A(y_p) + A(z) = f + 0 = f.$$

Reciproc, dacă y_p și y_p^* verifică ecuația $A(y) = f$, notînd $y = y_p^* - y_p$, rezultă

$$A(y) = A(y_p^* - y_p) = A(y_p^*) - A(y_p) = f - f = 0$$

și deci y este o soluție a ecuației omogene $A(y) = 0$.

Cu aceste considerații, se poate spune că soluția particulară a ecuației (8.1) este unic determinată dacă se face abstracție de o soluție aditivă a ecuației omogene.

Soluția ecuației omogene (8.1′) are întotdeauna o formă bine precizată fiind o combinație liniară de soluții speciale ale ecuației omogene de forma $e^{p_j t}$, $t\,e^{p_j t}$, ..., $t^s e^{p_j t}$, dacă $p_j, a_k \in \mathbb{C}$, a_k fiind coeficienții ecuației (8.1) $s_j \in \mathbb{N}$, și de forma

$$e^{p_j t},\ t\,e^{p_j t},\ \ldots,\ t^{s_j}\,e^{p_j t},$$

$$e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t),\ e^{\alpha_j t}\sin(\beta_j t),\ te^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t),\ te^{\alpha_j t}\sin(\beta_j t),\ \ldots$$

$$\ldots,\ t^{s_j}e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t),\ t^{s_j}e^{\alpha_j t}\sin(\beta_j t),\quad \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R},\ s_j \in \mathbb{N} \text{ dacă } a_k \in \mathbb{R},$$

ceea ce înseamnă că soluțiile ecuației (8.1′) sînt funcții analitice pe $\mathbb{R}$ (orice soluție analitică pe $\mathbb{R}_+$, așa cum este $y_h(t)$ dat de (8.7), se poate prelungi pe $\mathbb{R}$, deoarece funcțiile elementare anterioare sînt analitice pe $\mathbb{R}$).

Soluția ecuației neomogene (8.1) nu este indefinit derivabilă decît dacă termenul liber f are această proprietate; în plus, din (8.6) rezultă imediat că dacă $f \in C^r(\mathbb{R}_+)$, atunci $y_p \in C^{n+r}(\mathbb{R}_+)$ (deoarece integrala cu parametru $\int_0^t g(t-x)f(x)\,dx$ va fi de clasă $C^{n+r}(\mathbb{R}_+)$, după cum se poate verifica prin derivări succesive).

Nu este obligatoriu să se presupună momentul inițial $t = 0$; dacă se dau condițiile (8.2) nu pentru $t = 0$ ci pentru $t = t_0$, atunci prin translația $t \to t - t_0$ (deci introducînd o nouă variabilă independentă $t' = t - t_0$), deoarece ecuația (8.1) nu-și modifică forma cu această schimbare, momentul inițial $t = t_0$ se reduce la $t' = 0$ pentru care sînt valabile toate considerațiile anterioare.

Trebuie avut grijă de faptul că în loc de $f(t)$ se scrie $f(t' + t_0)$ iar în forma finală a soluției se aplică translația inversă.

În cazul în care ecuația (8.1) are coeficienții reali, din (8.3) rezultă că trebuie determinate funcțiile original ale funcțiilor imagine de forma $\frac{Q(p)}{P(p)}$ (dacă se face abstracție de contribuția lui f) care sînt funcții raționale; se poate urma calea indicată mai sus pentru coeficienți complecși, dar este posibil să obținem unele simplificări de calcul în cazul în care polinomul caracteristic are rădăcini complexe.

Astfel, descompunînd funcția rațională $\frac{Q}{P}$ în funcții raționale simple, se obțin, după cum se cunoaște, patru tipuri de astfel de funcții și anume

$$\frac{A}{p-p_0},\quad \frac{B}{(p-p_0)^t},\quad \frac{Cp+D}{p^2+ap+b} \text{ și } \frac{Ep+F}{(p^2+ap+b)^k},$$

unde $A, B, C, D, E, F,\ p_0,\ a,\ b \in \mathbb{R}$ cu $a^2 - 4b < 0$, $j, k \in \mathbb{N}$; pentru primele două funcții raționale simple problema determinării funcțiilor original corespunzătoare este simplă:

$$L^{-1}\left(\frac{A}{p-p_0}\right)(t) = A\,e^{p_0 t},\quad L^{-1}\left[\frac{B}{(p-p_0)^j}\right](t) = \frac{A}{(j-1)!}\,t^{j-1}\,e^{p_0 t}.$$

Pentru ultimele două funcții determinarea funcției imagine se poate realiza descompunînd în continuare numitorii, în care caz însă, deoarece $a^2 - 4b < 0$, se obțin valori complexe pentru coeficienții acestor descompuneri; se poate evita utilizarea numerelor complexe, făcînd observația că

$$L[\sin(at)](p) = \frac{a}{p^2+a^2},\quad L[\cos(at)](p) = \frac{p}{p^2+a^2}$$

și, de aceea, vom avea

$$\frac{Cp+D}{p^2+ap+b} = \frac{Cp+D}{\left(p+\frac{a}{2}\right)^2+\left(\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\right)^2} =$$

$$= \frac{C\left(p+\frac{a}{2}\right)+\left(D-\frac{Ca}{2}\right)}{\left(p+\frac{a}{2}\right)^2+\left(\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\right)^2} = C\,\frac{p+\frac{a}{2}}{\left(p+\frac{a}{2}\right)^2+\left(\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\right)^2} =$$

$$+\left(D-\frac{Ca}{2}\right)\frac{1}{\left(p+\frac{a}{2}\right)^2+\left(\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\right)^2},$$

iar pentru utilizarea proprietății de deplasare (teorema 7.7) se obține

$$L^{-1}\left(\frac{Cp+D}{a^2+ap+b}\right)(p) = Ce^{-\frac{a}{2}t}\cos\left(\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\,t\right)+$$
$$+\left(D-\frac{Ca}{2}\right)e^{-\frac{a}{2}t}\sin\left(\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\,t\right).$$

În cazul ultimei funcții raționale este mai comod însă să se utilizeze totuși descompunerea în funcții raționale simple de forma $\frac{B}{(p-p_j)^k}$, $B, p_j \in \mathbb{C}$, ținînd seama că odată cu această funcție rațională va apărea și funcția rațională $\frac{\bar{B}}{(p-\bar{p}_j)^k}$ iar combinarea funcțiilor original respective conduce la o funcție reală.

Se mai poate utiliza și observația că funcția rațională $\frac{Ep+F}{(p^2+ap+b)^k}$ se poate exprima cu ajutorul derivatei în raport cu p a funcției $(p^2+ap+b)^{1-k}$ și deci plecînd de la $(p^2+ap+b)^{-1}$ se poate obține $(p^2+ap+b)^{-2}$ etc.

Exemple

4. Soluția ecuației diferențiale $y''' + y = 0$ care verifică datele inițiale $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = -4$ va fi funcția original pentru funcția imagine

$$Y(p) = \frac{3p^2+2p-4}{p^3+1} = \frac{-1}{p+1} + \frac{4p-3}{p^2-p+1} =$$

$$= \frac{-1}{p+1} + 4\,\frac{p-\frac{1}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2} - \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}.$$

Rezultă

$$y(t) = -e^{-t} + 4e^{\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

5. Soluția ecuației diferențiale $y^{IV} + 2y'' + y = 0$, care verifică datele inițiale $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = -8$, se obține calculînd

$$L^{-1}\left(\frac{2p^3+2p^2+2p+2}{p^4+2p^2+1}\right)(t) = L^{-1}\left[\frac{1-i}{p-i} + \frac{1+i}{p+i} + \frac{2}{(p-i)^2} + \frac{2}{(p+i)^2}\right](t) =$$

$$= (1-i)e^{it}+(1+i)e^{-it}+2te^{it}+2te^{-it} = (e^{it}+e^{-it}) + \frac{1}{i}(e^{it}-e^{-it}) + 2t(e^{it}+e^{-it}) =$$

$$= 2\cos t + 2\sin t + 4t\cos t.$$

8.2. Sisteme diferențiale liniare cu coeficienți constanți

Vom lua în considerație inițial cazul sistemelor diferențiale de ordinul întîi

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}y_1' + a_{12}y_2' + \ldots + a_{1n}y_n' + b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \ldots + b_{1n}y_n = f_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &a_{n1}y_n' + a_{n2}y_2' + \ldots + a_{nn}y_n' + b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \ldots + b_{nn}y_n = f_n \end{aligned}\right\} \quad (8.9)$$

dacă $y_1, \ldots, y_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ sînt funcțiile necunoscute, $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ sînt termenii liberi iar $a_{jk}, b_{jk} \in \mathbb{C}$, $j, k = 1, 2, \ldots, n$, sînt coeficienții sistemului.

Introducînd matricele pătrate $\mathbf{A} = [a_{jk}]$, $\mathbf{B} = [b_{jk}]$, $j, k = 1, 2, \ldots, n$, și matricele coloană $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \ldots, y_n]^t$, $\mathbf{F} = [f_1, f_2, \ldots, f_n]^t$, sistemul (8.9) se scrie simplu, sub formă de ecuație diferențială vectorială (matriceală);

$$\mathbf{AY}' + \mathbf{BY} = \mathbf{F}. \quad (8.9')$$

Vom presupune $y_1, \ldots, y_n, f_1, \ldots, f_n$ funcții original și, prin definiție, vom pune

$$L(\mathbf{Y})(p) = [L(y_1)(p), L(y_2)(p), \ldots, L(y_n)(p)]^t,$$

$$L(\mathbf{F})(p) = [L(f_1)(p), L(f_2)(p), \ldots, L(f_n)(p)]^t;$$

dacă se cunosc condiţiile iniţiale

$$y_1(0) = y_{10}, y_2(0) = y_{20}, \ldots, y_n(0) = y_{n0}, \; y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0} \in \mathbb{C}, \tag{8.10}$$

vom putea scrie (8.10) sub formă matriceală astfel :

$$\mathbf{Y}|_{t=0} = \mathbf{Y}_0 = [y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}]^t. \tag{8.10'}$$

Aplicînd transformarea Laplace sistemului (8.9), se obţine ecuaţia algebrică matriceală

$$\mathbf{A}[pL(\mathbf{Y})(p) - \mathbf{Y}_0] + \mathbf{B}L(\mathbf{Y})(p) = L(\mathbf{F})(p)$$

sau

$$(p\mathbf{A} + \mathbf{B})\, L(\mathbf{Y})(p) = \mathbf{A}\mathbf{Y}_0 + L(\mathbf{F})(p),$$

a cărei soluţie va fi (conform cu regula lui Cramer)

$$L(\mathbf{Y})(p) = (p\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Y}_0 + (p\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}L(\mathbf{F})(p)$$

şi deci, soluţia problemei Cauchy (8.10) pentru sistemul diferenţial (8.9) se scrie matriceal astfel :

$$\mathbf{Y}(t) = L^{-1}[(p\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{A}\,\mathbf{Y}_0](t) + L^{-1}[(p\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}L(\mathbf{F})(p)]\,(t). \tag{8.11}$$

Notînd $P(p) = \det[p\mathbf{A} + \mathbf{B}]$, P va fi un polinom de grad n dacă $\det \mathbf{A} \neq 0$ şi un polinom de grad inferior lui n dacă matricea $\mathbf{A}$ este singulară ; conform cu metoda de construcţie a matricei inverse, va rezulta că matricea $(p\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}$ este o matrice pătrată ale cărei elemente sînt funcţii raţionale de variabila complexă p (reamintim că matricea inversă are fiecare element format din raportul unor determinaţi de ordin $n-1$ ai matricei $\mathbf{A}p + \mathbf{B}$ (la numărător) şi $P(p)$ (la numitor).

Dacă matricea $\mathbf{A}$ nu este singulară, atunci aceste funcţii raţionale au gradul numitorului egal cu n iar gradul numărătorului cel mult egal cu $n-1$; acest fapt are drept consecinţă posibilitatea aplicării teoriei transformării Laplace în cadrul obişnuit al funcţiilor în cazul $\det \mathbf{A} \neq 0$ iar dacă $\det \mathbf{A} = 0$, nu se poate aplica acest procedeu.

Dacă însă se utilizează teoria distribuţiilor, se pot folosi metodele transformării Laplace şi în cazul $\det \mathbf{A} = 0$ (deoarece în această

ultimă situaţie funcţiile raţionale care apar în structura matricei inverse pot avea gradul numărătorului mai mare sau cel puţin egal cu gradul numitorului şi deci funcţiile imagine nu tind la zero cînd $p \to \infty$).

De asemenea, dacă $\det \mathbf{A} = 0$, valorile iniţiale (8.10) nu se pot da arbitrar aşa cum se întîmplă în cazul $\det \mathbf{A} \neq 0$. Cazul $\det \mathbf{A} \neq 0$ al sistemului (8.9) se numeşte *normal* pentru acest sistem iar dacă $\det \mathbf{A} = 0$, sistemul (8.9) se numeşte *degenerat* (sau *nenormal*), iar în cazul normal sistemul (8.9) se poate scrie sub formă normală

$$\mathbf{Y}' + \mathbf{B}_1\mathbf{Y} = \mathbf{F}_1 \quad \text{cu} \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}, \quad \mathbf{F}_1 = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F},$$

pentru care teorema de existenţă şi unicitate asigură comportarea normală a soluţiilor problemei Cauchy (8.10) : soluţia există şi este unic determinată pentru orice date iniţiale (8.9).

Cu aceste consideraţii se pot scoate unele concluzii în legătură cu soluţiile problemei Cauchy (8.10) pentru sistemele liniare degenerate :

Soluţia poate exista numai dacă valorile y_{j0}, $j = 1, 2, \ldots, n$, din (8.10) se dau în mod convenabil iar chiar dacă aceste valori sînt alese astfel încît să existe o soluţie, această soluţie poate să fie o distribuţie (nu o funcţie obişnuită).

Toate rezultatele anterioare se pot extinde şi la sisteme de ordin superior lui unu ; astfel, orice sistem de n ecuaţii de ordin m cu coeficienţi constanţi se poate scrie sub forma matriceală

$$\mathbf{A}_m\mathbf{Y}^{(m)} + \mathbf{A}_{m-1}\mathbf{Y}^{(m-1)} + \ldots + \mathbf{A}_1\mathbf{Y}' + \mathbf{A}_0\mathbf{Y} = \mathbf{F}, \tag{8.12}$$

unde $\mathbf{A}_j$, $j = 0, 1, \ldots, m$, sînt matrice pătrate de ordin n iar $\mathbf{Y}$ şi $\mathbf{F}$ au aceeaşi semnificaţie ca şi în cazul sistemului (8.9'); pentru sistemul (8.12) condiţiile iniţiale se scriu sub forma

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}' = \mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}^{(m-1)} = \mathbf{Y}_{m-1} \text{ pentru } t = 0, \tag{8.13}$$

unde $\mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_{m-1}$ sînt matrice coloană constante formate cu numere complexe oarecare.

Dacă $\det \mathbf{A}_m \neq 0$, sistemul (8.12) se numeşte *normal* iar dacă $\det \mathbf{A}_m = 0$, sistemul (8.12) se numeşte *degenerat* (sau *nenormal*) şi se pot reobţine toate rezultatele anterioare (pentru ecuaţia matriceală de ordinul întîi).

Vom exemplifica acum teoria expusă anterior.

6. Fie un punct material cu masa unitate, lansat dintr-un punct oarecare al suprafeței terestre, cu o viteză inițială dată $\mathbf{v}_0$, direcția de lansare făcînd un unghi dat α cu verticala locului; dacă se ia în considerație și influența rotației Pămîntului (considerînd că viteza unghiulară de rotație este egală cu $\omega = a/2$) și nu se ia în considerație rezistența opusă de atmosfera terestră, se pot deduce, pentru coordonatele punctului material în cauză $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, următoarele ecuații de mișcare:

$$\ddot{x} - (a\cos\alpha)\,\dot{y} = 0,\quad \ddot{y} + (a\cos\alpha)\,\dot{x} + (a\sin\alpha)\,\dot{z} = 0,\quad \ddot{z} - (a\sin\alpha)\,\dot{y} = -g, \tag{8.14}$$

dacă sistemul de coordonate are originea în punctul de lansare, axa x este dirijată spre sud, axa y este dirijată spre est iar axa z (în sens negativ) este dirijată spre centrul Pămîntului (în această situație unghiul α este colatitudinea locului de lansare).

Sistemul (8.14) este evident un caz particular al sistemului (8.12), în care $m = 2, n = 3$,

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 \\ a\cos\alpha & 0 & a \\ 0 & -a\sin\alpha & 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_0 = 0,\quad \mathbf{F} = [0, 0, -g]^t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

iar condițiile inițiale (8.13) vor fi aici

$$\mathbf{Y}_0 = [0, 0, 0]^t,\quad \mathbf{Y}_0' = [v_x, v_y, v_z]^t,\quad (\mathbf{v}_0 = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}). \tag{8.15}$$

Deoarece $\det\mathbf{A}_2 = 1$ (de fapt este vizibil că sistemul (8.14) este scris direct sub formă normală), rezultă că integrarea sistemului (8.14) nu va ridica probleme. Aplicăm deci transformarea Laplace fiecărei ecuații a sistemului (8.14); notînd

$$L(x)(p) = X(p),\ L(y)(p) = Y(p),\ L(z)(p) = Z(p)$$

și ținînd seama de condițiile inițiale, se obține sistemul algebric

$$p^2 X - a\cos\alpha \cdot pY = v_x,\qquad a\cos\alpha \cdot pX + p^2 Y + a\sin\alpha \cdot pZ = v_y,$$

$$-a\sin\alpha \cdot pY + p^2 Z = v_z - \frac{g}{p},$$

deoarece $L(g)(p) = g/p$. Calculînd determinantul acestui sistem, în care necunoscutele sînt X, Y, Z, se obține

$$P(p) = p^6 + a^2\cos^2\alpha\, p^4 + a^2\sin^2\alpha\, p^2 = p^4(p^2 + a^2),$$

iar cu ajutorul regulei lui Cramer găsim

$$X(p) = \left[\frac{1}{p^2 + a^2} + \frac{4a^2\sin^2\alpha}{p^2(p^2 + a^2)}\right] v_x + \frac{a\cos\alpha\, v_y}{p(p^2 + a^2)} - \frac{a^2\sin\alpha\cos\alpha\, v_z}{p^2(p^2 + a^2)} + \frac{a\sin\alpha\cos\alpha\, g}{p^3(p^2 + a^2)},$$

$$Y(p) = -\frac{a\cos\alpha\, v_x}{p(p^2 + a^2)} + \frac{v_x}{p^2 + a^2} - \frac{a\sin\alpha\, v_z}{p(p^2 + a^2)} + \frac{a\sin\alpha\, g}{p^2(p^2 + a^2)},$$

$$Z(p) = \frac{a^2\sin\alpha\cos\alpha\, v_x}{p^2(p^2 + a^2)} + \frac{a\sin\alpha\, v_y}{p(p^2 + a^2)} + \left[\frac{1}{p^2 + a^2} + \frac{a^2\cos^2\alpha}{p^2(p^2 + a^2)}\right] v_z - \left[\frac{1}{p(p^2 + a^2)} + \frac{a^2\cos^2\alpha}{p^3(p^2 + a^2)}\right] g.$$

Funcțiile original se pot obține acum imediat:

$$x(t) = \frac{v_x}{a}(at\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\sin(at)) + \frac{2v_y}{a}\cos\alpha\sin^2\left(\frac{a}{2}t\right) - \frac{v_z}{a}(a - \sin(at))\sin\alpha\cos\alpha + \frac{2g}{a^2}\left(\frac{a^2t^2}{4} - \sin^2\left(\frac{a}{2}t\right)\right)\cdot\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$y(t) = -\frac{2v_x}{a}\cos\alpha\sin^2\left(\frac{a}{2}t\right) + \frac{v_y}{a}\sin(at) - \frac{2v_z}{a}\sin^2\left(\frac{a}{2}t\right) + \frac{g}{a^2}(at - \sin(at))\sin\alpha;$$

$$z(t) = \frac{v_x}{a}(at - \sin(at))\sin\alpha\cos\alpha + \frac{2v_y}{a}\sin\alpha\sin^2\left(\frac{a}{2}t\right) + \frac{v_z}{a}(\cos^2\alpha - at + \sin^2\alpha\,\sin(at)) - \frac{2g}{a^2}\left(\frac{a^2t^2}{4}\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\sin^2\left(\frac{a}{2}t\right)\right).$$

Din aceste egalități se deduc, pentru $a \to 0$ (adică pentru cazul în care rotația Pămîntului i nu se ia în considerație) relațiile cunoscute

$$x = v_x t, \quad y = v_y t, \quad z = v_z t - \frac{g}{2} t^2$$

care exprimă legea de mișcare a unui punct material supus atracției Pămîntului, după ce a fost lansat cu viteza inițială $\mathbf{v}_0$.

7. Fie acum sistemul diferențial și condițiile inițiale

$$y' + y + 2z = f, \; y'' + z' - y = 0, \; y(0) = y_0, \; y'(0) = y_1, \; z(0) = z_0, \; z'(0) = z_1. \quad (8.16)$$

Forma (8.12) a acestui sistem se deduce imediat ; se obțin matricele de ordinul al doilea

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

și matricele coloană $\mathbf{Y} = [y, z]^t$, $\mathbf{F} = [f, 0]^t$.

Deoarece $\det \mathbf{A}_2 = 0$, sistemul (8.16) este degenerat și teoria generală a sistemelor diferențiale nu este aplicabilă. Astfel, din prima ecuație a sistemului, pentru $t \downarrow 0$ se obține egalitatea

$$y'(0+) + y(0+) + 2z(0+) = f(0+)$$

care arată că între datele inițiale y_0, y_1 și z_0 trebuie să existe relația de compatibilitate $y_0 + y_1 + 2z_0 = f(0+)$. Dacă această egalitate nu este verificată, sistemul considerat nu admite soluții pentru problema Cauchy dată.

Presupunînd această condiție îndeplinită, soluția se obține aplicînd transformarea Laplace celor două ecuații ale sistemului (8.16) ; ținînd seama și de condițiile inițiale, se găsește sistemul algebric (cu notațiile $L(y) = Y$, $L(z) = Z$, $L(f) = F$) :

$$(p+1)Y + 2Z = F + y_0, \qquad (p^2 - 1)Y + pZ = py_0 + y_1 + z_1.$$

Determinantul sistemului fiind $P(p) = -p^2 + p - 2 = -(p-1)(p+2)$, regula lui Cramer conduce la expresiile

$$Y(p) = \frac{py_0 + 2y_1 + 2z_1}{(p+1)(p-2)} - \frac{p}{(p+1)(p-2)} F(p) =$$

$$= \frac{y_0 - 2y_1 - 2z_1}{3(p+1)} + \frac{2y_1 + 2z_1 + 2y_0}{3(p-2)} - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p+1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{p-2} \right) \cdot F(p),$$

$$Z(p) = -\frac{(z_1 + y_1 + y_0)p + y_1 + z_1 + y_0}{(p+1)(p-2)} + \frac{p+1}{p-2} \cdot F(p) =$$

$$= -\frac{z_1 + y_1 + y_0}{p-2} + \left(1 + \frac{3}{p-2}\right) \cdot F(p)$$

și deci soluțiile problemei (8.16) vor fi

$$y(t) = \frac{1}{3}(y_0 - 2y_1 - 2z_1)e^{-t} + \frac{2}{3}(y_0 + y_1 + z_1)e^{+2t} - \frac{1}{3}\int_0^t e^{-t+x} f(x)\, dx -$$

$$- \frac{2}{3}\int_0^t e^{-2x+2t} f(x)\, dx,$$

$$z(t) = -(z_1 + y_1 + y_0)e^{+2t} - 3\int_0^t e^{-2x+2t} f(x)\, dt + f(t)$$

($1 \cdot F(p)$ are drept transformare Laplace inversă convoluția $(\delta * f)(t) = f(t)$, deoarece $L(\delta)(p) = 1$, δ fiind distribuția lui Dirac).

Din forma soluțiilor rezultă că spre deosebire de cazul unui sistem nedegenerat (cu $\det \mathbf{A}_m \neq 0$) sistemele degenerate sînt mult mai complexe ; astfel, din soluția pentru z se observă că pentru a avea $z \in C^2(\mathbb{R}_+)$, este obligatorie condiția $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$, care nu apare în cazul ordinar cînd este suficient ca funcția original să fie doar continuă pe $\mathbb{R}_+$; dacă f nu este de două ori derivabilă, atunci soluția obținută trebuie considerată soluție în sensul distribuțiilor.

8.3. Ecuații diferențiale neliniare

Deși transformarea Laplace este indicată în special pentru rezolvarea problemei Cauchy atașate unor ecuații sau sisteme diferențiale liniare, aceasta este aplicabilă și pentru rezolvarea problemei Cauchy pentru unele ecuații sau sisteme neliniare ; schema formală de rezolvare a acestor situații este următoarea : dacă ecuația neliniară în cauza are forma

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y + g(t, y, y', \ldots, y^{(m)}) = f(t) \quad (8.17)$$

cu $m<n$, $a_j \in \mathbb{C}$, $f:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, $g:\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{C}$ iar condițiile inițiale sînt

$$y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}, \tag{8.18}$$

atunci, în baza metodei obișnuite, prin aplicarea transformării Laplace, din (8.7) și (8.8) rezultă o egalitate de forma

$$P_1(p)\cdot L(y)(p) - P_2(p, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) + L[g(t, y, y', \ldots, y^{(m)})](p) =$$

$$= L(f)(p),$$

în care $P_1(p) = a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0$ iar P_2 este un polinom în p de grad cel mult $n-1$, din care se va obține relația

$$L(y)(p) = G_1(p)H(p) - G_1(p)\cdot L[g(t, y, y', \ldots, y^{(m)})] \tag{8.19}$$

cu notațiile $G_1 = \dfrac{1}{P_1}$, $H = L(f) + P_2$; aplicînd transformarea inversă, se obține egalitatea [cu $g_1 = L^{-1}(G_1)$, $h = L^{-1}(H)$]

$$y(t) = g_1(t) * h(t) - g_1(t) * g(t, y, y', \ldots, y^{(m)}) =$$

$$= (g_1 * h)(t) - \int_0^t g_1(t-x)g[x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(m)}(x)]\mathrm{d}x, \tag{8.19'}$$

care poat fi considerată ca o ecuație integrală neliniară pentru funcția necunoscută y.

Această ecuație, dacă admite o soluție, ceea ce de fapt se întîmplă dacă problema (8.17), (8.18) admite o soluție, soluția se poate obține prin aproximații succesive, după modelul cunoscut: se ia $y_0(t) = (g_1 * h)(t)$ și

$$y_{k+1}(t) = (g_1 * h)(t) - \int_0^t g_1(t-x)\ g(x, y_k(x), y_k'(x), \ldots, y_k^{(m)}(x))\,\mathrm{d}x,\ k \in \mathbb{N}.$$

Evident, acest procedeu se poate aplica chiar ecuației algebrice (8.19), ceea ce uneori poate fi mai avantajos: astfel, luînd $Y_0(p) = (G_1\cdot H)(p)$, din (8.19) se deduce

$$Y_{k+1}(p) = (G_1\cdot H)(p) - G_1(p)\cdot L[g(t, y_k, y_k'(t), \ldots, y_k^{(m)}(t))](p)$$

cu $y_k = L^{-1}(Y_k)$, $k \in \mathbb{N}$, iar dacă Y_0 este cunoscut, va fi cunoscut și $y_0 = L^{-1}(Y_0)$, ceea ce face să se poată determina $Y_1(p) = (G_1\cdot H)(p) - G_1(p)L(g(t, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(m)}))(p)$, de unde se deduc $y_1 = L^{-1}(Y_1)$ etc.

Exemplu

8. Fie ecuația diferențială de ordinul al doilea

$$y'' + (2a - by^2)y' + (a^2 - cy^2)\,y = 0,\quad a, b, c, \in \mathbb{C}, \tag{8.20}$$

care trebuie integrată în condițiile inițiale

$$y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1. \tag{8.20'}$$

Separînd partea liniară, ecuația (8.20) se va scrie sub forma echivalentă

$$y'' + 2ay' + a^2y = by^2y' + cy^3;$$

dacă i se aplică transformarea Laplace, se obține, cu ajutorul condițiilor (8.20'), ecuația algebrică [cu notația $L(y) = Y$]

$$(p^2 + 2ap + a^2)Y(p) = y_0p + y_1 + 2ay_0 + L(by^2y' + cy^3)(p),$$

din care se obține imediat

$$Y(p) = \frac{y_0p + y_1 + 2a\,y_0}{(p+a)^2} + \frac{1}{(p+a)^2}L(by^2y' + cy^3)(p) =$$

$$= \frac{y_0}{p+a} + \frac{y_1 + ay_0}{(p+a)^2} + \frac{1}{(p+a)^2}L(by^2y' + cy^3)(p) \tag{8.21}$$

și deci se obține următoarea ecuație integrală verificată de soluția în cauză:

$$y(t) = y_0\,\mathrm{e}^{-at} + (y_1 + ay_0)t\mathrm{e}^{-at} + \int_0^t (t-x)\,\mathrm{e}^{-a(t-x)}[by^2(x)y'^2(x) + cy^3(x)]\mathrm{d}x. \tag{8.21'}$$

Să găsim cîteva aproximaţii succesive ale soluţiei; pentru uşurinţa calculelor, fie $y_0 = 0$, $y_1 \neq 0$ şi atunci din (8.21′) găsim

$$y_0(t) = y_1 t e^{-at};$$

tot (8.21′) conduce la aproximaţia următoare:

$$y_1(t) = y_0(t) + \int_0^t (t-x)\ e^{-a(t-x)}\ [a^2 b y_1^4 x^4 e^{-4ax} + c y_1^3 x^3 e^{-3ax}]\,dx$$

care se poate calcula pe cale elementară (prin părţi). Se determină apoi y_2, y_3 etc.

Dacă însă în loc de utilizarea formei finale (8.21′) a soluţiei se porneşte cu forma (8.21) a acesteia, vom avea

$$Y_0(p) = \frac{y_1}{(p+a)^2}, \text{ deci } y_0[(t) = y_1 t e^{-at}$$

şi deci

$$Y_1(p) = \frac{y_1}{(p+a)^2} + \frac{1}{(p+a)^2} L(b y_0^2 y_0'^2 + c y_0^3)(p) =$$

$$= \frac{y_1}{(p+a)^2} + \frac{1}{(p+a)^2} L(a^2 b y_1^4 t^3 e^{-4at}) + \frac{1}{(p+a)^2} L(c y_1^3 t^3 e^{-3at}) =$$

$$= \frac{y_1}{(p+a)} + \frac{a^2 b y_1^4}{(p+a)^2} \frac{d^4}{dp^4} \frac{1}{p+4a} - \frac{c y_1^3}{(p+a)^2} \frac{d^3}{dp^3} \frac{1}{p+3a}.$$

După efectuarea calculelor, se obţine forma finală pentru Y_1, din care se va obţine y_1 iar procedeul continuă pînă la determinarea unei aproximaţii convenabile.

8.4. Ecuaţii integrale şi ecuaţii diferenţiale cu diferenţe

Calculul operaţional se poate aplica şi pentru rezolvarea uuor ecuaţii integrale de tip special; vom arăta aceasta luînd în considerare cîteva exemple.

8.4.1. Rezolvarea unor ecuaţii integrale

Fie ecuaţia integrală

$$\int_0^t y(x) g(t-x)\,dx = f(t), \qquad f, g, y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C},$$

în care f şi g se presupun cunoscute iar y trebuie determinat astfel încît ecuaţia în cauză să fie verificată.

Prin aplicarea transformării Laplace, cu ajutorul teoremei de convoluţie se obţine egalitatea $L(y) \cdot L(g) = L(f)$, de unde rezultă soluţia căutată

$$y = L^{-1}\left[\frac{L(f)}{L(g)}\right] = f * g_1,$$

dacă $g_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ este astfel încît $L(g_1) = \dfrac{1}{L(g)}$.

În particular, să considerăm *ecuaţia lui Abel*

$$\int_0^t \frac{y(x)\,dx}{(t-x)^\alpha} = f(t), \quad \alpha \in]0, 1[,$$

deci $f(0+) = 0$ (de fapt ecuaţia considerată de Abel avea $\alpha = 1/2$ şi apărea cu ocazia rezolvării unei probleme de mecanică numită *tautochrona* şi anume: să se determine arcul de curbă plană care are proprietatea că dacă un punct material oscilează datorită gravitaţiei dar fără frecare pe acest arc, perioada de oscilaţie să nu depindă de amplitudinea mişcării.

Dacă $y = y(x)$ este ecuaţia curbei, timpul în care punctul material parcurge arcul de curbă între punctele $(0, y(0))$ şi $(a, y(a))$ este egal cu

$$\int_0^a \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g(h - y)}}\,dx, \text{ dacă } y(0) = h, y(a) = 0,$$

iar dacă
T este perioada oscilaţiei, va trebui să avem $\dfrac{T}{4} = \int_0^x \sqrt{\dfrac{1 + f'^2}{2g(y-f)}}\,d\xi$,
punctul $(\xi, f(\xi))$ fiind de pe graficul curbei, iar (x, y) punctul de pe grafic în care se atinge amplitudinea maximă a mişcării. Efectuînd o schimbare de variabilă şi considerînd $f = \eta$ variabilă independentă iar ξ noua funcţie necunoscută, din ultima egalitate se obţine relaţia $T = \dfrac{4}{\sqrt{2g}} \int_0^y \dfrac{1}{\sqrt{y - \eta}} \sqrt{\dfrac{1 + \eta'^2}{\eta'^2}}\,d\eta$, care este ecuaţia lui Abel cu $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $y = \sqrt{\dfrac{1 + \eta'^2}{\eta'^2}}$, $f = \dfrac{\sqrt{2g}}{4} T$.

În baza consideraţiilor făcute pentru cazul general, avem $g(t) = t^{-\alpha}$, deci $L(g)(p) = \dfrac{\Gamma(1-\alpha)}{p^{1-\alpha}}$; rezultă

$$L(y)(p) = \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} L(f)(p) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)}\, p\, \frac{\Gamma(\alpha)}{p^{\alpha}} \cdot L(f)(p) =$$

$$= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\, p\, L(t^{-1+\alpha})(p) \cdot L(f)(p),$$

ceea ce înseamnă

$$L(y)(p) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\, p\, L(t^{-1+\alpha} * f(t))(p) =$$

$$= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} L\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^{-1+\alpha} * f(t))\right](p) + \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}(t^{-1+\alpha} * f(t))\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} L\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^{-1+\alpha} * f(t))\right](p),$$

deoarece $(t^{-1+\alpha} * f(t))\Big|_{t=0} = \int_0^0 x^{-1+\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

Soluţia căutată va fi dată de egalitatea

$$y(t) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^{-1+\alpha} * f(t)) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^t \frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{(t-x)^{1-\alpha}}.$$

În cazul problemei de mecanică amintită mai sus găsim

$$y(t) = \sqrt{\frac{1+\eta'^2}{\eta'^2}} = \frac{\sin(\pi/2)}{\pi} \frac{\sqrt{2g}}{4} T \int_0^{\eta} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\eta - x}} = \frac{1}{\pi} \frac{T\sqrt{2g}}{4\sqrt{\eta}}$$

şi se obţine pentru η o ecuaţie diferenţială de ordinul întîi; notînd $a = \dfrac{gT^2}{16\pi^2}$, cu substituţia $\eta = a(1-\cos t)$ se obţine din ecuaţia diferenţială $\dfrac{1+\eta'^2}{\eta'^2} = \sqrt{a\eta}$, $\dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} = \eta'$, $x = a(t+\sin t)$ şi deci arcul de curbă în studiu este un arc de cicloidă.

8.4.2. Ecuaţia diferenţială cu diferenţe

Ca exemplu să luăm ecuaţia de forma

$$y^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n-1} a_{kj}\, y^{(k)}(t-h_j) = f(t), \tag{8.22}$$

unde $a_{kj} \in \mathbb{C}$, $h_j \in \mathbb{R}_+$, iar $0 \leqslant h_0 < h_1 < \ldots < h_m$ (se pot considera şi sisteme diferenţiale de aceeaşi formă) şi se presupune că f şi y pot fi interpretate ca funcţii original.

Ecuaţiile de tipul (8.22) se numesc şi *ecuaţii diferenţiale cu argument întîrziat* (în cazul de faţă coeficienţii ecuaţiei sînt constanţi iar întîrzierile sînt de asemenea constante) şi vom presupune că datele iniţiale ataşate sînt nule:

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(0) = 0. \tag{8.22'}$$

În această situaţie, deoarece $L(g(t-t_0))(p) = \mathrm{e}^{-pt_0} L(g)(p)$ (teorema de întîrziere), din (8.22) şi (8.22'), prin aplicarea transformării Laplace se obţine ecuaţia transcendentă

$$\left(p^n + \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n-1} a_{kj} p^k \mathrm{e}^{-ph_j}\right) L(y)(p) = L(f)(p),$$

din care rezultă soluţia căutată

$$y(t) = L^{-1}\left[\frac{L(f)(p)}{p^n + \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n-1} a_{kj} p^k \mathrm{e}^{-ph_j}}\right](t).$$

Astfel, de exemplu, în cazul ecuaţiei simple

$$y'(t) + ay(t-1) = 0 \tag{8.23}$$

pentru care se presupune condiția inițială de forma

$$y(t) = y_0, \quad \text{dacă } -1 \leqslant t < 0, \tag{8.23'}$$

prin aplicarea transformării Laplace se obține ecuația

$$pL(y)(p) - y_0 = -ae^{-p}L(y)(p) - a\int_{-1}^{0} y_0 e^{-p(t+1)}\,dt =$$

$$= -ae^{-p}L(y)(p) - ay_0\frac{1-e^{-p}}{p},$$

din care rezultă

$$L(y)(p) = \frac{y_0}{p} - \frac{ay_0}{p(p+ae^{-p})} = \frac{y_0}{p} - \frac{y_0}{p^2}\cdot\frac{a}{1+\frac{a}{p}e^{-p}} =$$

$$= \frac{y_0}{p} - \frac{y_0}{p^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a^{k+1}e^{-kp}p^{-k},$$

ultima egalitate obținîndu-se prin dezvoltarea în serie a funcției $\frac{a}{1+\frac{a}{p}e^{-p}}$. Așadar, aplicînd transformarea Laplace inversă, se va obține soluția căutată :

$$y(t) = y_0 - y_0\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a^{k+1}L^{-1}(e^{-kp}p^{-k-2})(p) =$$

$$= y_0\left[1 - \sum_{k=0}^{[t]}(-1)^k a^{k+1}\frac{(t-k)^{k+1}}{(k+1)!}\right],$$

(unde $[t]$ este partea întreagă a numărului real t) deoarece avem

$$L^{-1}[e^{-ap}F(p)](t) = \begin{cases} f(t-a), & t \geqslant a \geqslant 0, \\ 0, & t < a, \end{cases}$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{p^{k+1}}\right)(t) = \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}.$$

8.5. Ecuații diferențiale liniare cu coeficienți polinoame

Fie ecuația diferențială liniară

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t), \tag{8.24}$$

în care coeficienții a_j sînt polinoame în variabila t de un grad oarecare iar f și y sînt presupuse funcții original. Aplicînd transformarea Laplace, deoarece se poate scrie

$$L[t^k f^{(j)}(t)](p) = (-1)^k\frac{d^k}{dp^k}L[f^{(j)}])(p) =$$

$$= (-1)^k\frac{d^k}{dp^k}[p^j L(f)(p) - p^{j-1}f(0) - \ldots - f_{j-1}(0)],$$

ecuația transformată corespunzătoare ecuației diferențiale (8.24) (presupunînd cunoscute condițiile inițiale) va fi iarăși o ecuație diferențială liniară, în care ordinul maxim de derivare a funcției necunoscute $L(y)$ este egal cu gradul maxim al polinoamelor a_j. Din acet motiv rezultă că pentru ecuațiile diferențiale de forma (8.24) este avantajoasă aplicarea transformării Laplace numai dacă noua ecuație diferențială este mai simplă decît ecuația (8.24) (adică dacă se obține o nouă ecuație diferențială care se poate integra mai simplu decît ecuația inițială) ; deci dacă în ecuația (8.24) a_j este polinom de gradul întîi :

$$a_j(t) = b_j t + c_j, \quad b_j, c_j \in \mathbb{C}, \quad j = 0,1, \ldots, n,$$

ecuația transformată va fi o ecuație diferențială liniară de ordinul întîi care se poate integra imediat.

Așadar, presupunînd ecuația (8.24) de forma

$$\sum_{j=0}^{n}(b_j t + c_j)y^{(j)} = f(t), \tag{8.25}$$

iar $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$, ecuația transformată va fi, notînd $L(y) = Y$, $L(f) = F$:

$$\sum_{j=0}^{n} c_j(p^k y - y_0 p^{j-1} - \ldots - y_{j-2}p - y_{j-1}) -$$

$$-\sum_{j=0}^{n} b_j \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(p^j Y - y_0 p^{j-1} - \ldots - y_{j-2} p - y_{j-1}) = F$$

sau

$$\left(\sum_{j=0}^{n} b_j p^j\right) Y' + \left[\sum_{j=0}^{n} (j b_j p^{j-1} - c_j p^j)\right] Y = F(p) - Q(p),$$

unde Q este un polinom de grad cel mult $n-1$.

Integrarea ultimei ecuații nu ridică probleme decît în măsura în care se solicită forma explicită a soluției. Astfel, în cazul ecuației

$$ty'' + ay' + by = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ a, b \in \mathbb{C},$$

ecuația transformată fiind $p^2 Y' = [(a-2)p + b]Y$, se obține imediat $Y(p) = Cp^{a-1} e^{-\frac{bp}{p}}$, C fiind constanta de integrare ; evident, funcția original se obține dezvoltînd în serie exponențială care apare în expresia imaginii.

8.6. Transformarea Fourier aplicată la integrarea ecuațiilor diferențiale

Fie ecuația diferențială liniară cu coeficienți constanți

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f, \qquad (8.26)$$

unde termenul liber f este o distribuție din $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$; prin *soluție fundamentală* în $\mathscr{D}'$ a ecuației (8.26) se înțelege distribuția $e \in \mathscr{D}'(= \mathscr{D}'(\mathbb{R}))$, cu proprietatea

$$a_n e^{(n)} + a_{n-1} e^{(n-1)} + \ldots + a_1 e' + a_0 e = \delta, \qquad (8.27)$$

ar prin *funcție Green* pentru ecuația (8.26) se înțelege acea soluție fundamentală care verifică anumite condiții suplimentare : condiții inițiale, condiții la limită sau condiții de comportare asimptotică.

Deoarece avem egalitățile

$$y^{(k)} = \delta^{(k)} * y$$

$\delta^{(k)} * y = (\delta * y)^{(k)} = y^{(k)}$, deoarece $\delta * y = y$), ecuația (8.27) se poate scrie și sub forma

$$(a_n \delta^{(n)} + a_{n-1}\delta^{(n-1)} + \ldots + a_1 \delta' + a_0 \delta) * e = \delta.$$

Aplicînd transformarea Fourier, deoarece $\hat{\delta} = 1$, $\hat{\delta}' = \mathrm{i}\xi$, ..., $\hat{\delta}^{(n)} = (\mathrm{i}\xi)^n$, găsim ecuația algebrică

$$[a_n(\mathrm{i}\xi)^n + a_{n-1}(\mathrm{i}\xi)^{n-1} + \ldots + a_1(\mathrm{i}\xi) + a_0] \cdot \hat{e} = 1$$

și deci $\hat{e}(\xi) = \dfrac{1}{P(\mathrm{i}\xi)}$, unde P este polinomul caracteristic al ecuației (8.26) ; notînd $\mathrm{i}^n a = b$, se poate scrie

$$P(\mathrm{i}\xi) = b(\xi - \xi_1)^{n_1}(\xi - \xi_2)^{n_2} \ldots (\xi - \xi_k)^{n_k},\ n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$$

iar $\hat{e}$ va putea fi descompus în funcții raționale simple :

$$\hat{e}(\xi) = \sum_{j=1}^{k} \left[\frac{A_{j1}}{\xi - \xi_j} + \ldots + \frac{A_{jn_j}}{(\xi - \xi_j)^{n_j}}\right],\ A_{jm} \in \mathbb{C},\ j = 1, \ldots, k,$$

$m = 1, \ldots, n_k$.

Dacă ξ_j sînt astfel încît $\mathrm{Im}\ \xi_j \neq 0$, se pot calcula direct transformatele Fourier inverse cu ajutorul teoremei reziduurilor iar dacă există un ξ_{j_0} astfel încît $\mathrm{Im}\ \xi_{j_0} = 0$, transformata Fourier inversă se poate calcula cu ajutorul valorii principale sau cu ajutorul unui proces de trecere la limită : se scrie în loc de ξ_{j_0} numărul complex $\xi_{j_0} + \mathrm{i}\alpha$ și după ce se calculează transformata Fourier inversă se trece la limită, făcînd $\alpha \to 0$.

Prin urmare, rezultă existența soluției fundamentale în $\mathscr{D}'$ a oricărei ecuații de forma (8.26) iar

$$e(x) = F^{-1}[\hat{e}(\xi)](x) = F^{-1}\left[\frac{1}{P(\mathrm{i}\xi)}\right](x).$$

Odată cunoscută soluția elementară, se poate deduce soluția particulară a ecuației (8.26) care va fi $y_p = e * f$, în ipoteza că această convoluție are sens (este suficient să se presupună f cu suport compact).

Exerciții și completări

1°. Să se arate că dacă f este funcție original periodică, cu perioada $a > 0$, atunci $L[f(x)](p) = (1 - e^{-pa})^{-1}\int_0^a f(x)\, e^{px}\, dx$ iar dacă $F(p) = L(f)(p)$ (f funcție original arbitrară) este integrabilă pe $\mathbb{R}_+$, atunci $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\, dt = \int_0^\infty F(p)\, dp$.

R. $\int_0^\infty f(x)e^{-px}\, dx = \sum_{n=0}^\infty \int_{na}^{(n+1)a} f(x)e^{-px}\, dx = \sum_{n=0}^\infty e^{-pna}\int_0^a f(t)\, e^{-pt}\, dt$

cu schimbarea $x = t + na$.

Deoarece $L\left[\frac{1}{x} f(x)\right](p) = \int_p^{+\infty} F(q)\, dq$, pentru $p = 0$ se obține a doua egalitate.

2°. Cu ajutorul exercițiului 1 să se arate că

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_0^\infty \frac{\exp(-at) - \exp(-bt)}{t}\, dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad a > 0, \quad b > 0,$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos(at) - \cos(bt)}{t}\, dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right), \quad a > 0,\ b > 0,$$

$$\int_0^\infty \frac{\exp(-at) - \exp(-bt)}{t} \sin(ct)\, dt = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{c}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{c}\right), \quad a > 0,\ b > 0,\ c > 0,$$

$$\int_0^\infty \frac{\exp(-at)\sin(bt)}{t}\, dt = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right), \quad a > 0,\ b > 0,$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x}\, dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{a+b}{a-b}\right|, \quad a > 0,\ b > 0,\ a \neq b.$$

R. Deoarece $L(\sin(x(p)) = \frac{1}{1+p^2}$, avem

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^\infty \frac{dp}{1+p^2} = \operatorname{arctg} p \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2} \text{ etc.}$$

3°. Dacă δ este distribuția lui Dirac (deci $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$, φ fiind funcție-test), să se stabilească egalitățile:

a) $L(\delta)(p) = 1$,

b) $L(\delta^{(k)})(p) = p^k$, $k \in \mathbb{N}$,

c) $L(\delta(x - x_0))(p) = e^{-px_0}$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

R. a) $L(\delta)(p) = \langle \delta(x), e^{-px} \rangle = e^{-px}\,|_{x=0} = 1$;

b) $L(\delta^k)(p) = \langle \delta^{(k)}(x), e^{-px} \rangle = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} e^{-px}\Big|_{x=0} = p^k$;

c) $L(\delta)(x - x_0))(p) = \langle \delta(x - x_0), e^{-px} \rangle = e^{-px}|_{x=x_0} = \exp(-px_0)$.

4°. Să se determine soluțiile ecuațiilor diferențiale, care verifică datele Cauchy indicate:

a) $y'' - 2y' + 5y = 1 - x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;

b) $y''' + y'' = \sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$;

c) $y''' + 3y'' - 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$;

d) $y^{IV} + y''' = \cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 1$.

R. a) $y = \frac{3}{25} - \frac{x}{5} - \frac{3}{25} e^x \cos(2x) + \frac{4}{25} e^x \sin(2x)$;

b) $y = 2x + \frac{1}{2} e^{-x} + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$;

c) $y = \frac{2}{9} e^x - \frac{2}{3} xe^{-2x} - \frac{2}{9} e^{-2x}$;

d) $y = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} e^{-x} + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$.

5°. Cu ajutorul transformării Laplace să se obțină soluțiile ecuațiilor :

a) $xy'' + (2x - 1)y' + (x - 1)y = 0$;

b) $y'' - xy' + 3y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$;

c) $y'' + xy' - (x + 1)y = 0,\ y(0) = 1,\ y(0) = 1.$

R. În baza proprietăților transformării Laplace avem

$$L(y')(p) = pY - y(0),\quad L(y'')(p) = p^2 Y - py(0) - y'(0)$$

și deci, cum $L(xy)(p) = -Y'(p)$, rezultă $-L(xy')(p) = (pY - y(0))' = pY' - Y.$

$$-L(xy'')(p) = (p^2 Y - py(0) - y'(0))' = p^2 Y' + 2pY - y(0),$$

ceea ce conduce la transformarea ecuațiilor date în ecuații diferențiale liniare de ordinul întîi în raport cu Y ; se obțin soluțiile

a) $y = (c_1 + c_2 x^2)\mathrm{e}^{-x}$;

b) $y(x) = x - \frac{1}{3}x^3$;

c) $y(x) = \mathrm{e}^x.$

6°. Să se determine soluțiile sistemelor diferențiale care verifică datele Cauchy respective :

a) $\begin{cases} y' = -y + z + \mathrm{e}^x \\ z' = y - z - 2 - 2\mathrm{e}^x + 2x\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$

$z(0) = -2,\ y(0) = 0$

b) $\begin{cases} y'' + y' + 3y - 2z'' + z' - 9z = 0, & y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \\ y'' - y' + 5y - 2z'' - z' - 7z = 0, & z(0) = 1,\ z'(0) = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} tx' = x + y + z + 4 & x(0) = 0 \\ ty' = x - y + z + t, & y(0) = 0 \\ tz' = x + y - z + t^3 & z(0) = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 6tx' = 5x - y + 7z & x(0) = 1 \\ 3ty' = -x + 2y + z, & y(0) = 1 \\ 2tz' = x + y + 3z, & z(0) = 1 \end{cases}$

R. a) $y = 2 - x - 2\,\mathrm{e}^{-x} - 2x\,\mathrm{e}^{-x}$;

b) $y = \frac{2}{3}x^x - \frac{2}{3}\cos(2x) - \frac{1}{3}\sin(2x),$

$z = \frac{1}{3}\mathrm{e}^x + \frac{2}{3}\cos(2x) + \frac{1}{3}\sin(2x)$;

c) $x = -\frac{13}{12t} - \frac{1}{2}t + \frac{4}{3}t^2 + \frac{1}{4}t^3,\quad y = -\frac{1}{15t^2} + \frac{13}{12t} - 2 + \frac{1}{6}t +$

$+ \frac{2}{3}t^2 + \frac{3}{20}t^3,\quad z = \frac{1}{15t^2} + \frac{13}{12t} - 2 - \frac{1}{6}t + \frac{2}{3}t^2 + \frac{7}{20}t^3$;

d) $x = \frac{5}{4}t^2 - \frac{2}{3}t + \frac{5}{12},\quad y = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}t,\quad z = \frac{5}{4}t^2 - \frac{1}{4}$ •

7°. Cu ajutorul transformării Laplace să se găsească soluțiile ecuațiilor integrale :

a) $y(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}\int_0^x (x - t)^2 y(t)\,\mathrm{d}t$;

b) $y(x) = 2\sin x + 2\int_0^x \cos(x - t)\,y(t)\,\mathrm{d}t$;

c) $y(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\int_0^x (x - t)^3 y(t)\,\mathrm{d}t$;

d) $\int_0^x \cos(x - t)\,y(t)\,\mathrm{d}t = \sin x$;

e) $\int_0^x \cos(x - t)\,y(t)\,\mathrm{d}t = x.$

R. a) $y(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{12}\mathrm{e}^x + \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]$;

b) $y = 2x\,\mathrm{e}^x$;

c) $y(x) = \frac{1}{6}(\cos x + \mathrm{ch}\,x)$;

d) $y = 1$;

e) $y = 1 + \frac{1}{2}x^2.$

CAPITOLUL 9

Ecuații și sisteme diferențiale liniare

9.1. Noțiuni fundamentale

Ecuațiile diferențiale liniare de ordinul n au forma

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f, \tag{9.1}$$

unde atît coeficienții a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_1, a_0 cît și termenul liber f sînt funcții definite pe un interval $I \subset \mathbb{R}$ și cu valori complexe. Dacă a_j, $f \in C(I)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, iar $a_n(x_0) \neq 0$, $x_0 \in I$, teorema de existență și unicitate asigură existența unei singure soluții $y \in C^n(|x - x_0| < r)$ $r > 0$, a ecuației (9.1) care verifică datele inițiale (Cauchy)

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \; y_j \in \mathbb{C}, j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{9.2}$$

Dacă coeficientul a_n se anulează în I, atunci zerourile lui a_n se numesc *puncte singulare* ale ecuației (9.1); în vecinătatea punctelor singulare teorema de existență și unicitate a problemei Cauchy (9.2) pentru ecuația (9.1) nu este aplicabilă, ceea ce înseamnă că în vecinătatea acestor puncte soluția sau nu este de clasă C^n sau dacă este de clasă C^n nu verifică datele (9.2) cu $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ arbitrari.

În acest capitol se presupune $a_n(x) \neq 0$, $x \in I$, și deci, împărțind cu a_n, se obțin coeficienții $1, \frac{a_{n-1}}{a_n}, \ldots, \frac{a_1}{a_n}, \frac{a_0}{a_n}$ și termenul liber $\frac{f}{a_n}$ care vor fi funcții continue pe I și de aceea în considerațiile ce vor urma se presupune ecuația (9.1) scrisă sub forma

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f, \; a_j, f \in C^0(I), j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{9.1'}$$

numită de obicei *forma normală* a ecuației (9.1).

Notînd $w_n = y^{(n-1)}$, $w_{n-1} = y^{(n-2)}$, $\ldots$, $w_2 = y'$, $w_1 = y$, atunci deoarece $w_{k+1} = w_k'$, $k = 1, \ldots, n-1$, ecuația (1') se va scrie sub forma unui sistem diferențial liniar normal

$$\left.\begin{aligned} w_1' - w_2 &= 0 \\ w_2' - w_3 &= 0 \\ w_3' - w_4 &= 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_n' + a_0 w_1 + a_1 w_2 + \ldots + a_{n-2} w_{n-1} + a_{n-1} w_n &= f \end{aligned}\right\} \tag{9.3}$$

Introducînd notațiile matriceale

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & +1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & & & 0 & +1 \\ -a_0 & -a_1 & & & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{n-1} \\ w_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ f \end{bmatrix} \tag{9.4}$$

sistemul (9.3) se va scrie matriceal sub forma

$$\mathbf{w}' = \mathbf{A}\mathbf{w} + \mathbf{g}; \tag{9.3'}$$

reciproc, dacă în sistemul diferențial liniar de ordinul întîi (9.3') matricile $\mathbf{A}$ și $\mathbf{g}$ sînt definite cu ajutorul lui (9.4), atunci $w_1 = y$ verifică o ecuație diferențială liniară de ordinul n de forma (9.1') iar dacă sistemul (9.3') se înlocuiește prin sistemul

$$\mathbf{w}' = \mathbf{A}\mathbf{w} + \mathbf{g}, \tag{9.5}$$

unde $\mathbf{A}$ este o matrice pătrată de ordin n iar $\mathbf{g}$ este o matrice coloană oarecare, atunci dacă $\mathbf{A}, \mathbf{g} \in C^n(I)$, prin operaţii algebrice simple şi prin derivări succesive, se arată că fiecare element al matricei coloană $\mathbf{w}$ va verifica o ecuaţie diferenţială liniară de ordin cel mult n.

Astfel, dacă de exemplu $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x & -1 \\ 1 & 1-2x \end{bmatrix}$, $\mathbf{g} = \begin{bmatrix} e^x \\ 1 \end{bmatrix}$, w_1 va verifica ecuaţia

$$w_1'' + (x-1)\,w_1' + (1-2x^2)\,w_1 = 2xe^x$$

iar w_2 va verifica ecuaţia

$$w_2'' + (x-1)w_2' + (1+x-2x^2)\,w_2 = e^x - x.$$

Echivalenţa existentă între sistemele diferenţiale liniare de ordinul întîi şi ecuaţiile diferenţiale liniare de ordin superior permite uneori stabilirea mai simplă a unor proprietăţi ale soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale, deoarece este mai comod să se lucreze cu sisteme de forma (9.5) decît cu ecuaţii de forma (9.1); totuşi forma efectivă a soluţiilor este mai dificil de obţinut pentru sistemul (9.5) decît pentru ecuaţia (9.1), căreia uneori i se pot determina soluţiile prin anumite artificii. Să mai facem observaţia că problema Cauchy pentru sistemul (9.5) se scrie $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0$ pentru $t = 0$, unde $\mathbf{w}_0 = [y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}]^t$, y_j fiind definiţi prin (9.2).

Dacă în (9.1′) $f = 0$, se obţine *ecuaţia diferenţială liniară şi omogenă*

$$y^{(n)} + a_{n-1}\,y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0, \qquad (9.1'')$$

iar dacă în sistemul (9.5) avem $\mathbf{g} = 0$, se obţine *sistemul diferenţial liniar şi omogen*

$$\mathbf{w}' = \mathbf{A}\mathbf{w}. \qquad (9.5')$$

9.2. Teoria generală a sistemelor diferenţiale liniare

Prin *soluţie* în intervalul I a sistemului (9.5′) se înţelege orice matrice coloană $\mathbf{w}$ ale cărei elemente sînt funcţii de clasă $C^1(I)$ şi care verifică în I acest sistem.

Teorema 9.1. *Mulţimea soluţiilor sistemului omogen* (9.5′) *formează un spaţiu vectorial complex, avînd dimensiunea finită n (egală cu*

numărul de linii ale matricei coloană $\mathbf{w}$); *orice n soluţii particulare liniar independente ale sistemului omogen* (9.5′) *formează o bază în spaţiul vectorial al soluţiilor sale.*

Fie $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m$ soluţii ale sistemului (9.5′); dacă $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$, deoarece $\mathbf{w}_j' = \mathbf{A}\mathbf{w}_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$, notînd $\mathbf{w} = c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \ldots + c_m\mathbf{w}_m$, găsim

$$\mathbf{w}' = c_1\mathbf{w}_1' + \ldots + c_m\mathbf{w}_m' = \mathbf{A}\mathbf{w}_1 + \ldots + \mathbf{A}\mathbf{w}_m = \mathbf{A}(\mathbf{w}_1 + \ldots + \mathbf{w}_m)] = \mathbf{A}\mathbf{w},$$

ceea ce înseamnă că orice combinaţie liniară de soluţii ale sistemului (9.5′) este iarăşi o soluţie a aceluiaşi sistem; deci mulţimea soluţiilor sistemului omogen (9.5′) formează un spaţiu vectorial.

Să presupunem acum că s-au găsit $m > n$ soluţii liniare independente ale sistemului (9.5′) şi fie $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$; scriind $c_1\mathbf{w}_1(x_0) + c_1\mathbf{w}_1(x_0) + \ldots + c_m\mathbf{w}_m(x_0) = 0$ cu $x_0 \in I$, se obţine de fapt un sistem algebric, liniar şi omogen avînd n ecuaţii cu $m > n$ necunoscute $c_1, \ldots, c_m$ iar în baza teoremei lui Kronecker-Capelli, acest sistem admite sigur o soluţie nenulă. Aşadar, se pot determina constantele complexe $c_1, c_2, \ldots, c_m$ nu toate nule iar cu ajutorul lor se poate defini soluţia $\mathbf{w} = c_1\mathbf{w}_1 + \ldots + c_m\mathbf{w}_m$ sistemului (9.5′) care, deoarece verifică egalitatea $\mathbf{w}(x_0) = c_1\mathbf{w}_1(x_0) + \ldots + c_m\mathbf{w}_m(x_0) = 0$, în baza teoremei de existenţă şi unicitate a soluţiei problemei Cauchy, va da $\mathbf{w}(x) = 0$, dacă $x \in I$, adică vom avea $c_1\mathbf{w}_1 + \ldots + c_m\mathbf{w}_m = 0$, $x \in I$, iar nu toţi coeficienţii sînt nuli. Aceasta înseamnă că soluţiile $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m$ sînt liniar dependente, ceea ce contrazice ipoteza iniţială făcută asupra acestor soluţii şi această contradicţie arată că nu putem avea $m > n$, deci $m \leqslant n$; în baza teoremei de existenţă şi unicitate să determinăm $\mathbf{w}_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$, astfel încît

$$\mathbf{w}_1(x_0) = [1, 0, \ldots, 0]^t,\ \mathbf{w}_2(x_0) = [0, 1, 0, \ldots, 0]^t \text{ etc.}$$

Aceste soluţii sînt liniar independente pentru că scriind $c_1\mathbf{w}_1 + \ldots + c_m\mathbf{w}_m = 0$, $x \in I$, pentru $x = x_0 \in I$ se obţine $\mathbf{c} = [c_1, c_2, \ldots, c_m]^t = 0$, deci $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$; în concluzie, se pot determina întotdeauna $m \leqslant n$ soluţii liniar independente pentru sistemul omogen (9.5′

Faptul că orice n soluţii liniar independente formează o bază pentru spaţiul vectorial al soluţiilor sistemului (9.5′) rezultă dintr-o teoremă cunoscută din algebră (sau dacă nu dorim să o folosim, nu avem decît să scriem combinaţia liniară $c_0\mathbf{w} - c_1\mathbf{w}_1 - \ldots - c_n\mathbf{w}_n = 0$, unde $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ sînt soluţii liniar independente pentru sistemul (9.5′) iar $\mathbf{w}$ o soluţie oarecare a aceluiaşi sistem; cum $c_0 \neq 0$, se poate explicita $\mathbf{w}$).

Prin definiţie, orice n soluţii liniar independente ale sistemului omogen (9.5′) se numeşte *sistem fundamental* de soluţii al sistemului

în cauză. Scriind aceste soluții sub formă de matrice pătrată $\mathbf{W}$ de ordin n (adică prima coloană a acestei matrice este formată cu elementele lui $\mathbf{w}_1$, a doua coloană fiind construită cu elementele lui $\mathbf{w}_2$ etc., $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ fiind sistemul fundamental de soluții considerat), matricea $\mathbf{W}$ se numește *matrice fundamentală* a sistemului (9.5'). Este evident faptul că se verifică ecuația

$$\mathbf{W}' = \mathbf{AW}, \tag{9.5''}$$

deoarece, scriind $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n]$, avem

$$\mathbf{W}' = [\mathbf{w}_1', \mathbf{w}_2', \ldots, \mathbf{w}_n'] = [\mathbf{A}\,\mathbf{w}_1, \mathbf{Aw}_2, \ldots, \mathbf{Aw}_n] =$$
$$= \mathbf{A}\,[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n] = \mathbf{AW}.$$

Dacă $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ sînt soluții ale sistemului (9.5'), nu obligatoriu liniar independente, atunci formînd matricea pătrată de ordin n, $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n]$, prin *wronskian* al acestor soluții se înțelege funcția $\omega = \det \mathbf{W}$, iar $\mathbf{W}$ însuși se va numi *matrice integrală* a sistemului în cauză.

Teorema 9.2. *Wronskianul oricărui sistem fundamental de soluții este diferit de zero, pe cînd wronskianul unui sistem nefundamental de soluții este nul.*

⌜ Dacă $\omega(x_0) = 0$, $x_0 \in I$, rezultă că între coloanele lui $\mathbf{W}$ se poate stabili o relație de forma $c_1\mathbf{w}_1(x_0) + \ldots + c_n\mathbf{w}_n(x_0) = 0$ cu $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ nu toți nuli iar teorema de existență și unicitate arată că $c_1\mathbf{w}_1(x) + \ldots + c_n\mathbf{w}_n(x) = 0$ pentru orice $x \in I$, adică $\omega(x) = 0$, $x \in I$; deci dacă $\omega \neq 0$ într-un punct din I, raționamentul anterior arată că neapărat $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ iar în alt punct $\mathbf{w}$ nu poate fi nul dacă soluțiile formează un sistem fundamental. ⌟

Un rezultat important din teoria ecuațiilor și sistemelor diferențiale liniare este exprimat prin

Teorema 9.3. *Dacă ω este wronskianul soluțiilor $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ sistemului (9.5'), atunci este valabilă egalitatea*

$$\omega(x) = \omega(x_0)\ \exp\left[\int_{x_0}^{x} \operatorname{tr}\,\mathbf{A}\,(t)\,\mathrm{d}t\right],\ x_0,\ x \in I, \tag{9.6}$$

numită formula Abel-Liouville pentru sistemul considerat și în care s-a notat prin $\operatorname{tr}\mathbf{A}$ *urma matricei* $\mathbf{A}$, *adică*

$$\operatorname{tr}\mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}. \tag{9.7}$$

⌜ Utilizînd formula de derivare a unui determinant, va rezulta

$$\omega'(x) = (\det \mathbf{W})' = \sum_{j=1}^{n} \det[\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{j-1}, \mathbf{w}_j', \mathbf{w}_{j+1}, \ldots, \mathbf{w}_n];$$

deoarece $\mathbf{w}_j' = \mathbf{Aw}_j$, se deduce egalitatea

$$\det[\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{j-1}, \mathbf{Aw}_j, \mathbf{w}_{j+1}, \ldots, \mathbf{w}_n] = a_{jj} \det[\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n] = a_{jj}\omega,$$

folosind faptul că determinantul în cauză se descompune într-o sumă de determinanți în care apar și elementele matricei $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ iar toți determinații pentru care $j \neq k$ vor avea două coloane egale, deci vor fi nuli. Prin urmare, funcția ω va verifica ecuația diferențială

$$\omega'(x) = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{jj}(x)\right]\omega(x),$$

din care se deduce direct egalitatea (9.6). ⌟

Este ușor de constatat că teorema 9.2 se poate deduce din formula Abel-Liouville (9.6): dacă $\omega(x_0) = 0$ pentru un $x_0 \in I$, atunci $\omega(x) = 0$ pentru orice $x \in I$, iar dacă $\omega(x_0) \neq 0$, cum funcția exponențială nu se anulează pentru valori finite ale argumentului, neapărat $\omega(x) \neq 0$, pentru orice $x \in I$.

S-a văzut că pentru sistemul omogen

$$\mathbf{W}' = \mathbf{AW},\ \mathbf{A} \in C(I), \tag{9.5'}$$

există întotdeauna un sistem fundametal de soluții; cu ajutorul teoremei de existență și unicitate se pot însă construi oricîte sisteme fundamentale de soluții dorim.

Astfel, fie $[\alpha_{jk}]$ o matrice pătrată nesingulară ($\det[\alpha_{jk}] = 0$) și fie $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ soluții particulare ale sistemului (9.5') astfel încît $\mathbf{w}_j(x_0) = [\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{nj}]^t$; matricea pătrată $[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n]$ va fi o matrice fundamentală, deoarece wronskianul corespunzător fiind nenul în punctul x_0 (căci $\omega(x_0) = \det[\alpha_{jk}] \neq 0$), în baza teoremei 9.2 [sau a formulei (9.6)] avem $\omega(x) = 0$, $x \in I$.

Vom conveni să numim *matrice fundamentală normată* în x_0 matricea fundamentală $\mathbf{W}$ care într-un punct x_0 dat din I este astfel încît $\mathbf{w}(x_0) = [\delta_{jk}] = \mathbf{I}$, $[\delta_{jk}]$ fiind matricea unitate de ordin n (aici δ_{jk} sînt numerele δ ale lui Kronecker: $\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } j = k, \\ 0, & \text{dacă } j \neq k. \end{cases}$

Importanța matricelor fundamentale pentru teoria sistemelor diferențiale (de ordinul întîi) va rezulta clar din teoria care va fi prezentată mai jos ; în orice caz orice matrice fundamentală va admite o inversă în I.

Teorema 9.4. *Dacă* $\mathbf{W}$ *este o matrice fundamentală oarecare a sistemului* (9.5'), *atunci orice soluție a acestui sistem se scrie sub forma*

$$\mathbf{w} = \mathbf{W}\mathbf{c}, \tag{9.8}$$

unde $\mathbf{c}$ *este o matrice coloană constantă ; dacă sistemului* (9.5') *se atașează condiția inițială* $\mathbf{w}(x_0) = \mathbf{w}_0 = [w_{10}, w_{20}, \ldots, w_{n0}]^t$, *atunci soluția sistemului va fi*

$$\mathbf{w}(x) = \mathbf{W}(x)\,\mathbf{W}^{-1}(x_0)\,\mathbf{w}_0, \tag{9.8'}$$

care, în cazul în care $\mathbf{W}$ *este o matrice fundamentală normată se scrie sub forma mai simplă*

$$\mathbf{w}(x) = \mathbf{W}(x)\,\mathbf{w}_0 \tag{9.8''}$$

⌜ Fie $\mathbf{W}$ cunoscut și să presupunem soluția* sistemului (9.5') de forma $\mathbf{w} = \mathbf{W}\mathbf{u}$, unde $\mathbf{u}$ este un vector (coloană) de clasă $C^1(I)$, deocamdată necunoscut : deoarece

$$\mathbf{w}' = \mathbf{W}'\mathbf{u} + \mathbf{W}\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{W}\mathbf{u} + \mathbf{W}\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{w} + \mathbf{W}\mathbf{u}'$$

(dacă se ține seama de ecuația (9.5'')), înlocuind $\mathbf{w}'$ în (9.5'), se obține egalitatea $\mathbf{A}\mathbf{w} + \mathbf{W}\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{w}$ care conduce la ecuația $\mathbf{W}\mathbf{u}' = 0$, adică (deoarece $\det \mathbf{W} \neq 0$) $\mathbf{u}' = 0$, ceea ce înseamnă $\mathbf{u} = \mathbf{c}$. Înlocuind în (9.8) x cu x_0, se obține $\mathbf{w}(x_0) = \mathbf{W}(x_0)\mathbf{c}$ și cum $\mathbf{W}(x_0) = \mathbf{W}_0$, găsim $\mathbf{c} = \mathbf{W}^{-1}(x_0)\mathbf{w}_0$ și (9.8') este justificat. Dacă $\mathbf{W}$ este matrice fundamentală normată în x_0, din $\mathbf{W}(x_0) = [\delta_{jk}] = \mathbf{I}$ se obține $\mathbf{W}^{-1}(x_0) = [\delta_{jk}] = \mathbf{I}$, deci (9.8'') decurge direct din (9.8') ; deoarece (9.8') este valabil pentru orice $\mathbf{w}_0$, înseamnă că orice soluție a sistemului (9.5') se scrie în mod obligatoriu sub forma (9.8). ⌟

Teorema 9.5. *Soluția sistemului neomogen*

$$\mathbf{w}' = \mathbf{A}\mathbf{w} + \mathbf{f}, \qquad \mathbf{A}, \mathbf{f} \in C^0(I), \tag{9.5}$$

* Orice soluție a sistemului (9.5') se poate pune sub forma $\mathbf{w} = \mathbf{W}\mathbf{u}$, deoarece se pot scrie egalitățile $\mathbf{w} = \mathbf{I}\mathbf{w} = \mathbf{W}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{w} = \mathbf{W}\mathbf{u}$, cu $\mathbf{u} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{w}$ o matrice coloană cu n linii.

care verifică datele inițiaa

$$\mathbf{w}(x_0) = \mathbf{w}_0, \qquad x_0 \in I, \tag{9.9}$$

se scrie sub forma

$$\mathbf{w}(x) = \mathbf{W}(x)\mathbf{W}^{-1}(x_0)\,\mathbf{w}_0 + \mathbf{W}(x)\int_{x_0}^{x} (\mathbf{W}^{-1}\mathbf{f})(t)\,\mathrm{d}t, \tag{9.10}$$

unde $\mathbf{W}$ *este o matrice fundamentală a sistemului omogen* (9.5').

⌜ Vom utiliza metoda variației constantelor, adică în soluția (9.8) a ecuației omogene se presupune $\mathbf{c}$ înlocuit cu un vector neconstant $\mathbf{u}$: $\mathbf{w} = \mathbf{W}\mathbf{u}$; deoarece $\mathbf{w}' = \mathbf{A}\mathbf{w} + \mathbf{W}\mathbf{u}'$, înlocuind în (9.5), se obține egalitatea $\mathbf{W}\mathbf{u}' = \mathbf{f}$, ceea ce înseamnă $\mathbf{u}' = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{f}$, adică

$$\mathbf{u}(x) = \int_{x_0}^{x} (\mathbf{W}^{-1}\mathbf{f})(t)\mathrm{d}t + \mathbf{c}$$

(prin primitiva unei matrice se înțelege matricea primitivelor $\int [a_{jk}]\,\mathrm{d}x = \left[\int a_{jk}\,\mathrm{d}x\right]$). Înlocuind în $\mathbf{w} = \mathbf{W}\mathbf{u}$, se obține soluția căutată. ⌟

În considerațiile anterioare un rol important îl joacă matricea fundamentală $\mathbf{W}$, care poate fi considerată o aplicație de la spațiul $\mathbf{C}_n = \{\mathbf{w} = [w_1, \ldots, w_n]^t \mid w_j \in C\,[a, b]\}$, al vectorilor n-dimensionali continui, în el însuși ; dacă $\mathbf{w}_0$ este un vector constant, atunci $\mathbf{w}(=\mathbf{W}\,\mathbf{w}_0)$ este un vector cu componente derivabile. Este evident că matricea pătrată $\mathbf{W}$ depinde atît de x cît și de x_0 și vom pune în evidență acest fapt scriind $\mathbf{W} = \mathbf{W}(x\,;\,x_0)$, deci $\mathbf{w}(x) = \mathbf{W}(x\,;\,x_0)\mathbf{w}_0$ deoarece $\mathbf{W}$ conduce de la vectorul constant $\mathbf{w}_0$ la soluția corespunzătoare a sistemului (9.5'), matricea fundamentală $\mathbf{W}$ se mai numește și *operator rezolvant* al sistemului (9.5') ale cărui proprietăți sînt exprimate în teorema următoare :

Teorema 9.6. *Dacă* $\mathbf{W}$ *este o matrice fundamentală a sistemului* (9.5'), *atunci* :

a) $\mathbf{W}$ *realizează o aplicație continuă de la* $\mathbf{C}_n$ *la* $\mathbf{C}_n$;

b) $\mathbf{W}(x_0\,;\,x_0) = [\delta_{jk}]$;

c) $\mathbf{W}(x; x_0) = \mathbf{W}(x; x_1)\,\mathbf{W}(x_1; x_0)$ pentru orice $x, x_1, x_0 \in I$;

d) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathbf{W}(x; x_0) = \mathbf{A}(x)\,\mathbf{W}(x; x_0)$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_0}\mathbf{W}(x; x_0) = -\mathbf{W}(x, x_0)\mathbf{A}(x_0)$.

a) În baza teoremei de dependență continuă a soluției sistemelor diferențiale de vectorul inițial, dacă șirul de vectori $(\mathbf{u}_0^k)_{k\in\mathbb{N}}$ din $\mathbf{C}_n$ converge către vectorul $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{C}_n$ (deci dacă $\|\mathbf{u}_0^k - \mathbf{u}_0\| \to 0$ cînd $k \to \infty$), notînd $\mathbf{u}^k(x) = \mathbf{W}(x; x_0)\,\mathbf{u}_0^k$, va rezulta $\mathbf{u}^k(x) \to \mathbf{u}(x) = \mathbf{W}(x; x_0)\,\mathbf{u}_0$.

b) Deoarece $\mathbf{w}(x) = \mathbf{W}(x; x_0)\mathbf{w}_0$, pentru $x = x_0$ vom avea $\mathbf{W}(x_0) = \mathbf{W}(x_0; x_0)\mathbf{w}_0$; dar în baza condițiilor inițiale $\mathbf{w}(x_0) = \mathbf{w}_0$ ultima egalitate se scrie $(\mathbf{W}(x_0; x_0) - [\delta_{jk}])\mathbf{w}_0 = 0$ pentru orice vector constant $\mathbf{w}_0$; aceasta înseamnă $\mathbf{W}(x_0; x_0) = [\delta_{jk}]$.

c) În baza teoremei de unicitate, soluția sistemului (9.5′) în punctul $x \in I$ este aceeași dacă vectorul inițial este fie $\mathbf{w}(x_0) = \mathbf{w}_0$, fie $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}(x_1) = \mathbf{W}(x_1; x_0)\mathbf{w}_0$; deci

$$\mathbf{w}(x) = \mathbf{W}(x; x_0)\mathbf{w}_0 = \mathbf{W}(x; x_1)\mathbf{w}_1 = \mathbf{W}(x; x_1)\,(\mathbf{W}(x_1; x_0)\mathbf{w}_0) =$$

$$= (\mathbf{W}(x; x_1)\,\mathbf{W}(x_1; x_0))\,\mathbf{w}_0$$

și cum $\mathbf{w}_0$ este arbitrar, rezultă egalitatea în cauză.

d) Prima egalitate din d) este transcrierea egalității (9.5″) iar a doua egalitate este o consecință a proprietăților anterioare: din c) pentru $x = x_0$ se obține egalitatea (ținînd seama de b), $\mathbf{W}(x_0; x_1)\,\mathbf{W}(x_1, x_0) = \mathbf{I}$, care, fiind valabilă pentru orice x_0 și x_1 din I, o vom scrie cu x în loc de x_0 și x_0 în loc de x_1; egalitatea obținută, prin derivare în raport cu x_0 conduce la egalitatea

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{W}(x; x_0)}{\mathrm{d}x_0}\,\mathbf{W}(x_0; x) = -\,\mathbf{W}(x; x_0)\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{W}(x_0; x)}{\mathrm{d}x_0} =$$

$$= -\,\mathbf{W}(x; x_0)\,\mathbf{A}(x_0)\,\mathbf{W}(x_0; x)$$

[ultima egalitate s-a obținut utilizînd prima egalitate din d)]; cum $\mathbf{W}^{-1}(x_0; x)$ există, din relația

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{W}(x; x_0)}{\mathrm{d}x_0}\,\mathbf{W}(x_0; x) = (-\,\mathbf{W}(x; x_0)\,\mathbf{A}(x_0))\cdot\mathbf{W}(x_0; x)$$

se obține a doua egalitate d).

9.3. Metoda d'Alembert

Trecînd la determinarea efectivă a matricei fundamentale, s-a văzut anterior că aceasta se poate obține prin rezolvarea succesivă a n probleme Cauchy; pentru determinarea explicită a soluțiilor acestor probleme nu există metode generale de rezolvare. Dacă însă pentru sistemul (9.5′) se cunoaște o soluție particulară, acest sistem format din n ecuații diferențiale de ordinul întîi se poate transforma într-un sistem echivalent compus din $n-1$ ecuații diferențiale de ordinul întîi; deci, dacă pentru sistemul (9.5′) se cunosc $n-1$ soluții particulare liniar independente, atunci aplicînd succesiv rezultatul anterior, se obține în final o singură ecuație diferențială liniară de ordinul întîi, care se poate integra ușor.

Metoda prezentată în cele ce urmează de reducere a unui sistem de n ecuații diferențiale de ordinul întîi, scris sub forma normală, la un sistem de $n-1$ ecuații liniare de ordinul întîi, dacă se cunoaște o soluție particulară $\mathbf{w}_1$ a sistemului (9.5′), se numește *metoda lui d'Alembert*.

Fie $\mathbf{w}$ o soluție a sistemului (9.5′) și să scriem

$$\mathbf{w}(x) = \varphi(x)\,\mathbf{w}_1(x) + \mathbf{u}(x), \tag{9.11}$$

unde $\varphi \in C^1(I)$, $\mathbf{w}_1' = \mathbf{A}\mathbf{w}_1$, iar $\mathbf{u} = [0, u_2, \ldots, u_n]^t$ este un vector cu prima componentă nulă, care va fi noul vector necunoscut.

Scriind ecuația matriceală (9.5′), se obține, deoarece

$$\mathbf{w}' = \varphi'\mathbf{w}_1 + \varphi\mathbf{w}_1' + \mathbf{u}' = \varphi'\mathbf{w}_1 + \mathbf{A}\mathbf{w}_1\varphi + \mathbf{u}'$$

iar

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{A}(\varphi\mathbf{w}_1 + \mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{w}_1\varphi + \mathbf{A}\mathbf{u},$$

egalitatea

$$\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u} - \varphi'\mathbf{w}_1. \tag{9.12}$$

Prima ecuație a acestui sistem va fi (deoarece se presupune $u_1 = 0$)

$$\sum_{j=2}^{n} a_{1j}u_j = \varphi' w_{11} \tag{9.12′}$$

iar ecuația de indice k, $k = 2, 3, \ldots, n$, va fi

$$u_k' = \sum_{j=2}^{n} a_{kj}u_j - \varphi' w_{1k} \qquad (9.12'')$$

dacă presupunem $\mathbf{w}_1 = [w_{11}, w_{12}, \ldots, w_{1n}]^t$; înlocuind în (9.12'') funcția scalară φ' prin φ' determinat din (9.12'), se obține următorul sistem :

$$u_k' = \sum_{j=2}^{n} \left(a_{kj} - \frac{w_{1k}}{w_{11}} \right) u_j, \quad k = 2, 3, \ldots, n, \qquad (9.13)$$

format din $n-1$ ecuații liniare și omogene (presupunînd evident $w_{11} \neq 0$, ceea ce nu este o restricție ; dacă $u_{11} = 0$, cum soluția particulară $\mathbf{w}_1$ nu poate avea toate componentele nule, se repetă raționamentul anterior pentru o componentă nenulă a lui $\mathbf{w}_1$, ceea ce revine la modificarea lui u ; dacă, de exemplu, $w_{11} = 0$, $w_{12} \neq 0$, atunci se poate lua $\mathbf{u} = [u_1, 0, u_2, \ldots, u_n]^t$).

Dacă presupunem că s-a reușit să se determine o soluție particulară oarecare (evident nenulă) pentru sistemul (9.13), fie aceasta $\mathbf{u}^0 = [0, u_2^0, \ldots, u_n^0]^t$, atunci din (9.12') se obține φ printr-o cvadratură :

$$\varphi(x) = \int \frac{1}{w_{11}(x)} \left(\sum_{j=2}^{n} a_{1j}u_j \right) \mathrm{d}x. \qquad (9.14)$$

Fie $n-1$ soluții liniar independente $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^{n-1}$ ale sistemului (9.13) ; cu ajutorul lor din (9.14) se obțin $n-1$ funcții scalare $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ iar din (9.11) se vor obține $n-1$ soluții particulare $\mathbf{w}_{j+1} = \varphi_j \mathbf{w}_1 + \mathbf{u}^j$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$, ale sistemului (9.5) și, prin urmare, dacă se arată că soluțiile particulare $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ sînt liniar independente, problema integrării sistemului (9.5') este rezolvată.

Scriind combinația liniară $a_1\mathbf{w}_1 + a_2\mathbf{w}_2 + \ldots + a_n\mathbf{w}_n$ și egalînd-o cu zero, se observă că prima linie, datorită faptului că $\mathbf{u}^j$ are prima componentă nulă, va fi $(a_1 + a_2\varphi_1 + \ldots + a_n\varphi_{n-1})w_{11}$, care fiind nulă prin ipoteză, se obține egalitatea $a_1 + a_2\varphi_1 + \ldots + a_n\varphi_{n-1} = 0$ ($w_{11} \neq 0$), din care, prin înmulțire cu vectorul $\mathbf{w}_1$ se deduce egalitatea $a_1\mathbf{w}_1 + a_2(\mathbf{w}_2 - \mathbf{u}_1) + \ldots + a_n(\mathbf{w}_n - \mathbf{u}_{n-1}) = 0$ care conduce la $a_2\mathbf{u}_1 + \ldots + a_n\mathbf{u}_{n-1} = 0$, ceea ce antrenează $a_2 = \ldots = a_n = 0$, soluțiile $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}$ fiind liniar independente. Înlocuind $a_2 = 0, \ldots$

$\ldots, a_n = 0$ în egalitatea $a_1 + a_2\varphi_1 + \ldots + a_n\varphi_{n-1} = 0$, se obține $a_1 = 0$. În concluzie, soluțiile $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ sînt liniar independente.

Metoda lui d'Alembert este în particular eficace pentru sisteme diferențiale liniare de ordinul întîi formate din două ecuații, deoarece prin aplicarea procedeului indicat se obține o singură ecuație diferențială de ordinul întîi.

Exemple

1. Pentru sistemul

$$w_1' = xw_1 + (1-x)w_2, \quad w_2' = (1-x)w_1 + xw_2$$

o soluție particulară va fi $\mathbf{w}_1 = [x, x]^t$.

În notațiile anterioare, avem $a_{11} = x$, $a_{12} = 1-x$, $a_{21} = 1-x$, $a_{22} = x$, $w_{11} = x$, $w_{12} = x$ și deci sistemul (9.13) se reduce la ecuația

$$u' = \left(a_{22} - \frac{w_{12}}{w_{11}} a_{12} \right) u = (2x-1)u,$$

adică $u = \mathrm{e}^{-x+x^2}$ este o soluție particulară a acestei ecuații ; din (9.14) rezultă

$$\varphi(x) = \int \frac{1}{w_{11}} \cdot a_{12} \cdot u \, \mathrm{d}x = \int \frac{1-x}{x} \mathrm{e}^{x^2-x} \, \mathrm{d}x$$

și deci a doua soluție a sistemului dat, liniar independentă de $\mathbf{w}_1 = [x, x]^t$ va fi

$$\mathbf{w}_2 = \left(\int \frac{1-x}{x} \mathrm{e}^{x^2-x} \, \mathrm{d}x \right) [x, x]^t + [0, \mathrm{e}^{x^2-x}]^t.$$

2. Fie sistemul

$$\left.\begin{aligned} w_1' &= -\frac{2}{x} w_1 + \frac{1}{x^2} w_2 + x \\ w_2' &= w_1 - \frac{1}{x} w_2 + x^2 \end{aligned}\right\}$$

Aici $\mathbf{A}(x) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} \\ 1 & -\frac{1}{x} \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}(x) = \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix}$; sistemul omogen admite soluția particulară $w_1 = \frac{1}{x}$, $w_2 = 1$, după cum se verifică imediat.

Așadar, notațiile anterioare, în acest caz, înseamnă :

$a_{11} = \frac{2}{x}$, $a_{12} = \frac{1}{x^2}$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = -\frac{1}{x}$, $w_{11} = \frac{1}{x}$, $w_{12} = 1$. Deci u este soluție a ecuației $u' = -\frac{2}{x}u$, adică $u = x^{-2}$ iar $\varphi(x) = \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}$, ceea ce face ca cealaltă soluție a sistemului omogen să fie $\mathbf{w}_2 = \varphi\mathbf{w}_1 + [0, u]^t = -\frac{1}{2x^2}\left[\frac{1}{x}, 1\right]^t$, adică $w_{21} = -\frac{1}{2x^3}$, $w_{22} = \frac{1}{2x^2}$. Prin urmare, matricea

$$\mathbf{W}(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & -\frac{1}{2x^3} \\ 1 & \frac{1}{2x^2} \end{bmatrix}$$

va fi o matrice fundamentală a sistemului omogen în cauză (evident, pentru $x \neq 0$; $x = 0$ este punct singular pentru sistemul dat). Avem $\omega(x) = \det \mathbf{W}(x) = x^{-3}$ iar

$$\mathbf{W}^{-1}(x) = \begin{bmatrix} \frac{x}{2} & \frac{1}{2} \\ -x^3 & x^2 \end{bmatrix}$$

Prin urmare, în baza teoriei generale soluția sistemului dat care verifică datele Cauchy $\mathbf{w}(x)|_{x=x_0} = \mathbf{w}_0$, $x_0 \neq 0$, se va scrie

$$\mathbf{w}(x) = \mathbf{W}(x)\,\mathbf{W}^{-1}(x_0)\,\mathbf{w}_0 + \mathbf{W}(x)\int_{x_0}^{x} \mathbf{W}^{-1}(t)\,\mathbf{f}(t)\,dt.$$

În particular, dacă $\mathbf{w}(x_0) = [a, b]^t$, soluția sistemului omogen se va scrie

$$w_1(x) = \left(\frac{x_0}{2}\,x^{-1} + \frac{1}{2}\,x_0^3\,x^{-3}\right)a + \frac{1}{2}\,(x^{-1} - x_0^2\,x^{-3})\,b,$$

$$w_2(x) = \frac{1}{2}\,(x_0 - x_0^3\,x^{-2})\,a + \frac{1}{2}\,(1 + x_0^2\,x^{-1})\,b.$$

iar dacă f_1 și f_2 sînt precizați, efectuînd cvadraturile indicate în soluția scrisă anterior, se obține și o soluție particulară a sistemului de ecuații.

9.4. Teoria generală a ecuațiilor diferențiale liniare

În baza rezultatelor din 9.1, orice ecuație diferențială liniară de ordinul n

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = f \tag{9.15}$$

este echivalentă cu sistemul diferențial liniar de ordinul întîi

$$w_1' = w_2,\ w_2' = w_3,\ \ldots,\ w_{n-1}' = w_n,\ w_n' = -a_0w_1 - a_1w_1 - a_1w_2 - \ldots$$
$$\ldots - a_{n-1}w_n + f, \tag{9.15'}$$

a cărui formă matriceală va fi

$$\mathbf{w}' = \mathbf{A}\mathbf{w} + \mathbf{g}, \tag{9.15''}$$

în care $\mathbf{w}$ și $\mathbf{g}$ sînt vectorii, iar $\mathbf{A}$ este matricea pătrată, definiți în 9.1.

Condițiile inițiale (Cauchy) pentru ecuația (9.15) fiind de forma

$$y(x_0) = y_0,\quad y'(x_0) = y_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \tag{9.16}$$

acestea se vor scrie matriceal astfel :

$$\mathbf{w}(x_0) = \mathbf{w}_0 \text{ cu } \mathbf{w}_0 = [y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}]^t \tag{9.16'}$$

iar $x_0 \in I$, I fiind intervalul de continuitate a coeficienţilor $a_{n-1}, \ldots, a_0$ ai ecuaţiei (9.15) şi a termenului liber f.

Se obişnuieşte să se scrie ecuaţia (9.15) sub forma operatorială

$$Ly = f, \tag{9.17}$$

unde L este operatorul diferenţial liniar de ordinul n

$$L = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + a_0. \tag{9.17'}$$

Prin urmare, din rezultatele obţinute pentru sistemele diferenţiale liniare în 9.2 şi 9.3, se pot deduce consecinţe pentru soluţiile problemei Cauchy (9.16) pentru ecuaţia (9.15). Astfel, pentru orice alegere a funcţiilor continue $a_j, f: I \to \mathbb{C}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$ şi orice numere complexe $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ problema Cauchy (9.16) pentru ecuaţia (9.15) admite o singură soluţie în I; această soluţie se poate exprima, pentru orice date iniţiale (9.16) şi orice termen liber f cu ajutorul a n soluţii particulare $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ale ecuaţiei omogene

$$Ly = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0, \tag{9.18}$$

corespunzătoare ecuaţiei (9.15), dacă aceste soluţii sînt astfel alese încît matricea integrală pentru sistemul (9.15'') să fie fundamentală (adică nesingulară). Or, deoarece în cazul concret de faţă $\mathbf{w} = [y, y', \ldots, y^{(n-1)}]^t$, rezultă matricea integrală şi wronskianul sub forma

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \ldots y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}, \quad \omega = \det \mathbf{W} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \ldots y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \tag{9.19}$$

Deoarece pentru matricea $\mathbf{A}$ din (9.15''), avem $\mathrm{tr}\mathbf{A} = -a_{n-1}$, din (9.7) rezultă formula Abel-Liouville pentru ecuaţii diferenţiale liniare:

$$\omega(x) = \omega(x_0)\exp\left[-\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t\right]. \tag{9.20}$$

Prin urmare, pentru a se obţine soluţia ecuaţiei diferenţiale (9.15) care verifică datele iniţiale (9.16) este suficient să se scrie prima linie

a soluţiei matriceale $\mathbf{w}$ iar pentru ca această soluţie să aibă o formă cît mai simplă, vom presupune matricea fundamentală $\mathbf{W}$ din (9.19) normată, adică soluţiile particulare $y_1, y_2, \ldots, y_n$ vor fi astfel determinate încît să verifice datele iniţiale

$$y_j^{(k)}(x_0) = \delta_{jk},\ j = 1, 2, \ldots, n,\ k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{9.21}$$

deci

$y_j(x_0) = 0, \ldots, y_j^{(j-2)}(x_0) = 0, \quad y_j^{(j-1)}(x_0) = 1, \quad y_j^{(j)}(x_0) = 0, \ldots$
$\ldots, y_j^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$

ceea ce înseamnă $\omega(x_0) = 1$ şi, prin urmare, $\omega(x) = \exp\left[-\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t\right]$; atunci, deoarece

$$\mathbf{w}(x) = \mathbf{W}(x)\,\mathbf{w}_0 + \mathbf{W}(x)\int_{x_0}^{x} \mathbf{W}^{-1}(t)\,\mathbf{g}(t)\,\mathrm{d}t,$$

prima linie a acestei egalităţi vectoriale va fi

$$y(x) = y_0y_1(x) + y_1y_2(x) + \ldots + y_{n-1}y_n(x) + \sum_{j=1}^{n} y_j(x)\int_{x_0}^{x} \frac{\omega_j(t)}{\omega(t)} f(t)\,\mathrm{d}t, \tag{9.22}$$

în care cu ω_j s-a notat determinantul obţinut prin înlocuirea coloanei j în wronskianul ω prin $(0, 0, \ldots, 0, 1)$.

Într-adevăr, relaţia (9.22) va fi justificată dacă se arată modul de obţinere a ultimei sume; or, dacă se ţine seama de modul de formare a matricei inverse şi de faptul că $g = [0, \ldots, 0, f]^t$, egalitatea (9.22) este evidentă.

Înlocuind y_0 în (9.22) prin $c_1, \ldots, y_{n-1}$ prin c_n şi notînd

$$y_h = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n,$$

$$y_p(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j(x)\int_{x_0}^{x} \frac{\omega_j(t)}{\omega(t)} f(t)\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\frac{\omega_1(x,t)}{\omega(t)}\,\mathrm{d}t,$$

$$\omega_1(x, t) = \sum_{j=1}^{n} y_j(x)\,\omega_j(t) \tag{9.23}$$

[este evident că $\omega_1 = \omega_1(x, t)$ nu este altceva decît wronskianul $\omega(t)$ în care în ultima linie apar în loc de $y_1^{(n-1)}(t), \ldots, y_n^{(n-1)}(t)$ funcţiile $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$], se obţine egalitatea

$$y = y_h + y_p, \tag{9.22'}$$

în care y_h este o soluţie (care depinde de n constante oarecare) a ecuaţiei omogene (9.18) iar y_p este o soluţie a ecuaţiei neomogene (9.17).

Rezultă, aşadar, că forma soluţiei obţinute în cap. 8 în cazul ecuaţiilor diferenţiale cu coeficienţi constanţi se regăseşte şi în cazul general: soluţia oricărei ecuaţii diferenţiale liniare şi neomogene se compune dintr-o soluţie a ecuaţiei omogene, care este o combinaţie liniară a oricăror n soluţii particulare liniar independente a ecuaţiei omogene şi o soluţie particulară oarecare a ecuaţiei neomogene (cu menţiunea că şi această soluţie se poate obţine cu ajutorul celor n soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene).

Din teoria de la 9.2 rezultă că soluţia particulară se obţine cu ajutorul *metodei variaţiei constantelor* (care se mai numeşte şi *metoda lui Lagrange*); cum soluţia particulară y_p (din (9.22') este o consecinţă a unei soluţii deduse cu ajutorul metodei variaţiei constantelor, se poate afirma că y_p poate fi determinată şi pe altă cale, aplicîndu-se direct ecuaţiei (9.15) metoda variaţiei constantelor. Soluţia y_p dedusă pe această cale va coincide cu soluţia y_p anterioară dacă se face abstracţie de un factor aditiv care este soluţie a ecuaţiei omogene, deoarece din egalităţile $Ly_p = f$, $Ly_p^* = f$ se deduce $Ly_p - Ly_p^* = 0$, adică $L(y_p - y_p^*) = 0$, ceea ce înseamnă $y_p = y_p^* + y_h$.

Metoda variaţiei constantelor pentru ecuaţia (9.15) se poate aplica dacă se cunosc cele n soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene corespunzătoare; astfel, dacă $y_1, \ldots, y_n$ sînt aceste soluţii particulare (deci $\omega \neq 0$), se presupune y_p de forma

$$y_p(x) = z_1(x)\, y_1(x) + \ldots + z_n(x)\, y_n(x) = \sum_{j=1}^{n} (z_j\, y_j)(x), \tag{9.24}$$

deci înlocuind în y_h dat de (9.23), c_j prin $z_j = z_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, iar funcţiile z_j se determină impunînd acestor funcţii [presupuse de clasă $C^n(I)$] n condiţii convenabil alese, care se pot deduce astfel:

Deoarece $y_p' = \sum_{j=1}^{n} z_j y_j' + \sum_{j=1}^{n} z_j' y_j$, se poate impune condiţia

$$\sum_{j=1}^{n} z_j' y_j = 0,$$

ceea ce înseamnă $y_p' = \sum_{j=1}^{n} z_j y_j'$; impunînd apoi condiţia

$$\sum_{j=1}^{n} z_j' y_j' = 0,$$

se obţine $y_p'' = \sum_{j=1}^{n} z_j y_j''$ etc. Impunînd şi condiţia

$$\sum_{j=1}^{n} y_j^{(n-2)} z_j' = 0,$$

se obţine $y_p^{(n-1)} = \sum_{j=1}^{n} z_j y_j^{(n-1)}$, ceea ce înseamnă

$$y_p^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} z_j y_j^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} z_j' y_1^{(n-1)}.$$

Înlocuind $y_p, y_p', \ldots, y_p^{(n)}$ în ecuaţia (9.15), se obţine, ţinînd seama că L este operator liniar, egalitatea

$$Ly_p = \sum_{j=1}^{n} z_j Ly_j + \sum_{j=1}^{n} z_j'\, y_j^{(n-1)} = f,$$

care, deoarece $Ly_j = 0$, devine $\sum_{j=1}^{n} z_j' y_j^{(n-1)} = f$; strîngînd toate condiţiile impuse funcţiilor $z_1, \ldots, z_n$, se deduce următorul sistem:

$$\begin{cases} z_1' y_1 + \ldots + z_n' y_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_1' y_1^{(n-2)} + \ldots + z_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ z_1' y_1^{(n-1)} + \ldots + z_n' y_n^{(n-1)} = f \end{cases}$$

care poate fi interpretat ca un sistem algebric liniar şi neomogen, necunoscutele fiind $z_1', \ldots, z_n'$.

Deoarece determinantul acestui sistem este chiar ω (wronskianul soluţiilor $y_1, \ldots, y_n$), cum prin ipoteză $\omega \neq 0$, se obţin, prin aplicarea regulei lui Cramer soluţiile

$$z_j' = \varphi_j, \text{ deci } z_j = \int \varphi_j(x)\mathrm{d}x,$$

adică

$$y_p = \sum_{j=1}^{n} y_j \int \varphi(x)\mathrm{d}x$$

care se înlocuiesc în (9.24).

Ţinînd seama de modul în care se obţin $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ din sistem, se poate arăta că $y_p = \sum_{j=1}^{n} y_j \int \varphi_j(x)\mathrm{d}x$ nu este altceva decît y_p determinat prin (9.23).

Problema găsirii celor n soluţii $y_1, \ldots, y_n$ ale ecuaţiei omogene ($Ly_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$) care să formeze un sistem fundamental de soluţii a fost rezolvată în cap. 8 pentru cazul coeficienţilor constanţi; în afară de aceste ecuaţii particulare şi a încă cîtorva (care de fapt se reduc la ecuaţii cu coeficienţi constanţi prin transformări elementare) nu există vreo metodă generală care să indice modul de obţinere a acestor soluţii.

Există însă posibilitatea obţinerii unor soluţii particulare pentru ecuaţia omogenă prin aplicarea unor procedee speciale (cum ar fi aplicarea unor transformări integrale, căutarea soluţiilor sub forma unor integrale cu parametri sau fie sub formă de serii de puteri fie sub formă de serii Fourier etc.). În această situaţie este utilă uneori aplicarea metodei de reducere a ordinului ecuaţiei (9.15) cu atîtea unităţi cîte soluţii particulare se obţin pentru ecuaţia omogenă $Ly = 0$.

Astfel, presupunînd că pentru ecuaţia omogenă

$$Ly = \sum_{j=0}^{n} a_j y^{(j)} = 0 \tag{9.18}$$

(cu $a_n = 1$ sau nu) s-a obţinut o soluţie particulară y_1 (deci $Ly_1 = 0$), scriind în ecuaţia neomogenă

$$Ly = f, \tag{9.17}$$

$y = y_1 z$, z fiind noua funcţie necunoscută, deoarece

$$y^{(j)} = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} z^{(k)} y_1^{(j-k)}, \text{ cu } \binom{j}{k} = \frac{j(j-1)\ldots(j-k+1)}{k!}.$$

Prin înlocuire se obţine

$$Ly = \sum_{j=0}^{n} a_j \left(\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} z^{(k)} y_1^{(j-k)} \right) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^{(k)},$$

cu notaţia

$$b_k = \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} a_j y_1^{(j-k)}.$$

Pentru $k = 0$ se obţine

$$b_0 = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{0} a_j y_1^{(j)} = \sum_{j=0}^{n} a_j y_1^{(j)} = Ly_1,$$

deci ecuaţia (9.17) se va scrie sub forma

$$Ly = L(y_1 z) = \sum_{k=1}^{n} b_k z^{(k)} + z \cdot Ly_1 = f$$

şi deoarece $Ly_1 = 0$, se obţine, cu notaţia $z' = u$, o ecuaţie diferenţială de ordin $n - 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} u^{(k)} = f.$$

În acest mod, ordinul ecuaţiei (9.17) s-a coborît cu o unitate, dacă se cunoaşte o soluţie particulară a ecuaţiei omogene corespunzătoare.

Dacă $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ sînt $n - 1$ soluţii liniar independente ale ecuaţiei omogene $\sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} u^{(k)} = 0$, atunci

$$y_1, y_2 = y_1 \int u_1(x)\,\mathrm{d}x, y_3 = y_1 \int u_2(x)\,\mathrm{d}x, \ldots, y_n = y_1 \int u_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x$$

vor fi n soluţii liniar independente ale ecuaţiei (9.18); într-adevăr, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt soluţii ale ecuaţiei (9.18) (y_1 prin ipoteză, $y_2, \ldots, y_n$ prin construcţie) iar dacă ar exista numerele complexe $c_1, c_2, \ldots, c_n$ astfel încît $\sum_{j=1}^{n} c_j y_j = 0$, prin înlocuire se obţine, după simplificare

cu soluția nenulă y_1, egalitatea $c_1 + c_2 \int u_1 \, dx + \ldots + c_n \int u_{n-1} dx = 0$ care derivată va da $c_2 u_1 + \ldots + c_n u_{n-1} = 0$.

Prin urmare, cum $u_1, \ldots, u_{n-1}$ formează un sistem fundamental de soluții, rezultă $c_2 = \ldots = c_n = 0$, ceea ce antrenează evident și $c_1 = 0$.

9.5. Ecuații diferențiale de tip Euler

Ecuația Euler are forma

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 x y' + a_0 y = f(x),$$

unde $a_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $f: I \to \mathbb{C}$; se observă că ecuația omogenă nu-și modifică forma dacă în loc de x se pune $-x$, ceea ce înseamnă că dacă $y(x)$ este o soluție a ecuației omogene, atunci $y(-x)$ este o soluție a aceleiași ecuații. Prin urmare, se poate considera $x > 0$, ceea ce face posibilă utilizarea substituției $x = e^t$, $t \in \mathbb{R}$, și punînd $y(e^t) = z(t)$, $y(x) = z(\ln x)$, deoarece

$$\frac{dz}{dt} = y' \cdot x, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = x^2 \cdot y'' + x \cdot y', \quad \frac{d^3z}{dt^3} = x^3 y''' + 3x^2 y'' + x y', \ldots$$

ecuația dată se transformă într-o ecuație cu coeficienți constanți, prin înlocuirea lui xy', x^2y'', $x^3y''', \ldots$ prin z', $z'' - z'$, $z''' - 3z'' + 2z', \ldots$ respectiv.

Se mai pot determina n soluții particulare, presupunîndu-le de forma $y(x) = x^r$, $x > 0$, unde $r \in \mathbb{C}$ se determină astfel încît x^r să verifice ecuația dată; se obține ecuația algebrică

$$a_n r(r-1)\ldots(r-n+1) + a_{n-1} r(r-1)\ldots(r-n+2) + \ldots$$
$$\ldots + a_1 r + a_0 = 0$$

de grad n care poate fi numită *ecuația caracteristică* a ecuației Euler.

Fie $r_1, r_2, \ldots, r_n$ rădăcinile acestei ecuații; dacă acestea sînt distincte, atunci cele n soluții particulare liniar independente ale ecuației omogene vor fi $x^{r_1}, x^{r_2}, \ldots, x^{r_n}$; dacă însă $r_1 = r_2 = \ldots = r_{k_1}$, $r_{k_1+1} = r_{k_1+2} = \ldots = r_{k_2}$, $\ldots$, $r_{k_{p-1}+1} = \ldots = r_{k_p}$, $k_1 + k_2 + \ldots + k_p = n$, atunci în loc de soluțiile $x^{r_2}, \ldots, x^{r_{k_1}}$ vor apărea soluțiile $x^{r_2} \ln x$, $x^{r_2} (\ln x)^2, \ldots, x^{r_2} (\ln x)^{k_1 - 1}$ etc. (deoarece dacă se ține seama de transformarea $x = e^t$ care atașează ecuației Euler o ecuație cu coeficienți constanți, ale cărei soluții, în cazul rădăcinilor multiple ale polinomului caracteristic, vor fi $e^{r_1 t}$, $te^{r_1 t}, \ldots, t^{k_1 - 1} e^{r_1 t}$ iar $t = \ln x$).

Dacă $a_j \in \mathbb{R}$, din soluțiile complexe anterioare se pot obține soluții reale (pentru ecuația omogenă): scriind $r = \alpha + i\beta$, avem $x^r = x^{\alpha + i\beta} = x^\alpha \cdot x^{i\beta} = x^\alpha \cdot e^{i\beta \ln x} = x^\alpha [\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)]$ iar soluțiile reale vor fi evident $x^\alpha \cos(\beta x) = x^{\mathrm{Re}\, r} \cos(x \,\mathrm{Im}\, r)$, $x^\alpha \sin(\beta x) = x^{\mathrm{Re}\, r} \sin(x \,\mathrm{Im}\, r)$.

De asemenea, la ecuațiile Euler se pot aduce și ecuațiile diferențiale de forma

$$(ax+b)^n a_n y^{(n)} + (ax+b)^{n-1} a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + (ax+b) a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

cu substituția $ax + b = t$, deci $y^{(j)} = \dfrac{d^j y}{dx^j} = a^j \dfrac{d^j y}{dt^j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Exemple

3. Pentru ecuația

$$x^3 y''' + 3x^2 y'' + xy' - y = 0$$

căutînd soluții de forma $y = x^r$, ecuația caracteristică va fi $r^3 - 1 = 0$ și deci $r_1 = 1$, $2r_2 = -1 + i\sqrt{3}$, $2r_3 = -1 - i\sqrt{3}$; soluțiile particulare liniar independente vor fi deci

$$y_1(x) = x, \; y_2(x) = x^{-1/2} \cos\left(x \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \; y_3(x) = x^{-1/2} \sin\left(x \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

La același rezultat se ajunge prin efectuarea transformării $x = \exp(t)$.

4. În cazul ecuației Euler

$$x^2 y'' + xy' - y = x^q, \quad q \in \mathbb{R}, \quad x > 0$$

se verifică imediat că soluția generală a ecuației omogene va fi $y_h(x) = c_1 x + c_2 x^{-1}$ iar y_p se poate obține prin metoda variației constantelor, adică presupunînd y_p de forma $y_p(x) = z_1(x) x + z_2(x) x^{-1}$, funcțiile z_1 și z_2 determinîndu-se din sistemul $z_1' x + z_2' x^{-1} = 0$,

$z_1' - z_2' = x^{q-2}$. Se obține $y_p(x) = \frac{1}{q^2-1} x^q$, dacă $|q| \neq 1$, $y_p(x) = \frac{1}{2} x \ln x$, dacă $x = 1$, $y_p(x) = \frac{1}{2} x \ln x$, dacă $q = 1$, $y_p(x) = -\frac{1}{2} x^{-1} \ln x$, dacă $q = -1$.

9.6. Ecuațiile și sistemele diferențiale liniare și teoria distribuțiilor

În cazul unui sistem diferențial liniar scris sub forma normală

$$\mathbf{w}' = \mathbf{A}\mathbf{w} + \mathbf{g}, \tag{9.5}$$

dacă se presupune vectorul $\mathbf{w} = [w_1, \ldots, w_n]^t$ un vector-distribuție, deci $w_j \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, trebuie presupus că matricea $\mathbf{A}$ este un multiplicator în spațiul distribuțiilor vectoriale, adică $\mathbf{A} \in C^\infty$ iar vectorul $\mathbf{g} = [g_1, \ldots, g_n]^t$ este astfel încît $g_1, \ldots, g_n \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. În aceste condiții, este ușor de stabilit că sistemul omogen

$$\mathbf{w}' = \mathbf{A}\mathbf{w} \tag{9.5'}$$

nu admite alte soluții în afara soluțiilor clasice; într-adevăr, deoarece $\mathbf{A} \in C^\infty$, există matricea fundamentală $\mathbf{W} \in C^\infty$ și presupunînd $\mathbf{w} = \mathbf{W}\mathbf{z}$, $\mathbf{z}$ fiind o distribuție-vector, pentru a se verifica ecuația (9.5'), deoarece $\mathbf{W}' = \mathbf{A}\mathbf{W}$, se obține egalitatea $\mathbf{W}\mathbf{z}' = 0$, echivalentă cu ecuația vectorială $\mathbf{z}' = 0$ (deoarece $\det \mathbf{W} \neq 0$). Or, ca distribuție, singura soluție a ultimei ecuații va fi $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0 = [z_{10}, \ldots, z_{n0}]^t$, $z_{j0} \in \mathbb{C}$ și deci orice soluție a ecuației (9.5') se va scrie sub forma $\mathbf{w} = \mathbf{W}\mathbf{z}_0$, deci este o soluție obișnuită.

În schimb, pentru ecuația (9.5) soluția poate fi distribuție, deoarece din egalitatea (9.10) rezultă soluția $\mathbf{w} = \mathbf{W}\mathbf{z}_0 + \mathbf{W}\int \mathbf{W}^{-1}\mathbf{g}\,dx$ care arată că pentru $\mathbf{g}$ distribuție-vector și $\mathbf{W}\int \mathbf{W}^{-1}\mathbf{g}\,dx$ are aceeași proprietate.

În cazul în care se atașează sistemului (9.5) și problema Cauchy

$$\mathbf{w}(x_0) = \mathbf{w}_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}, \tag{9.25}$$

atunci în această situație se poate proceda în modul următor. Deoarece ne interesează soluția sistemului (9.5) doar pentru $x > x_0$, se pot presupune atît $\mathbf{w}$ cît și $\mathbf{g}$ nule pentru $x < 0$; să notăm prin $\mathbf{Y}$ distribuția-vector nulă pentru $x < x_0$ și care este soluție a problemei (9.5)—(9.25) pentru $x > x_0$; fie $\mathbf{Y}_1$ distribuția avînd suportul în $x \geqslant x_0$ și fiind egală cu $\mathbf{w}'$ pentru $x > x_0$. În aceste condiții, scriind $\mathbf{G} = 0$ pentru $x < x_0$ și $\mathbf{G} = \mathbf{g}$ pentru $x > x_0$, sistemul (9.5) se poate transcrie sub forma

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{G}. \tag{9.26}$$

Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ are un salt în $x = x_0$ și este derivabilă atît pentru $x < x_0$ cît și pentru $x > x_0$, notînd f' derivata în sensul teoriei distribuțiilor și prin f_1' distribuția corespunzătoare derivatelor obișnuite ale lui f calculate separat pentru $x < x_0$ și $x > x_0$, are loc egalitatea

$$f_1'(x) = f'(x) - h\delta(x - x_0), \quad \delta \text{ — distribuția lui Dirac}, \tag{9.27}$$

unde $h = f(x_0+) - f(x_0-)$ este saltul lui f în punctul x_0; deoarece relația (9.27) rămîne valabilă și în cazul distribuțiilor vectoriale, vom putea scrie egalitatea

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{w}_0\delta(x - x_0), \tag{9.27'}$$

care combinată cu egalitatea (9.26) conduce la ecuația

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{G} + \mathbf{w}_0\delta(x - x_0). \tag{9.28}$$

În acest mod, se poate considera demonstrată teorema următoare:

Teorema 9.7. *Problema Cauchy* (9.25) *pentru ecuația matriceală* (9.5) *este echivalentă cu ecuația matriceală în distribuții* (9.28) (*în care* $\mathbf{Y} = 0$ *pentru* $x < x_0$) *în sensul că soluția acestei ecuații va coincide cu soluția clasică a sistemului* (9.5) *care verifică* (9.25), *dacă și* $\mathbf{G}$ *este o funcție-vector* (*nu distribuție-vector*).

Cu alte cuvinte, problema în discuție (considerată pentru $x > x_0$) în sensul clasic se poate reduce la sistemul în distribuții (9.28), cu $\mathbf{Y}$ și $\mathbf{G}$ distribuții-vector nule pentru $x < x_0$ iar dacă $\mathbf{G} = \mathbf{g}$ pentru $x > x_0$, atunci dacă $\mathbf{g}$ este funcție vectorială, avem $\mathbf{Y} = \mathbf{w}$ pentru $x > x_0$, $\mathbf{Y} = \mathbf{w}_0$ pentru $x = x_0$.

Trecînd la cazul ecuației diferențiale (scalare) liniare de ordin n, din rezultatele de mai sus se poate deduce faptul că dacă aceasta are coeficienții funcții indefinit derivabile iar $a_n \neq 0$, atunci singurele soluții distribuții se pot obține numai dacă termenul liber este o distribuție.

Dacă se ia în considerație problema Cauchy pentru aceste ecuații, se poate lua în considerare ecuația în distribuții

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \left[Y^{(j)} - \sum_{k=0}^{j-1} y_k \delta^{(j-k-1)}(x - x_0) \right] = F \text{ pentru } x > x_0, \qquad (9.29)$$
$$Y = 0,\ F = 0, \text{ dacă } x < x_0,$$

atunci dacă $F = f$ pentru $x > x_0$, problema Cauchy admite o soluție (considerată ca distribuție dacă se presupune soluția nulă pentru $x < x_0$) care coincide cu soluția în distribuții a ecuației (9.29) și reciproc, orice soluție a ecuației (9.29), nulă pentru $x < x_0$, este soluție obișnuită a problemei Cauchy pentru ecuația dată dacă $x > x_0$ (iar F este distribuție regulată).

CAPITOLUL 10

Teoria matricelor aplicată la integrarea sistemelor diferențiale liniare

10.1. Noțiuni generale

Aici se vor studia unele aspecte ale teoriei sistemelor diferențiale liniare și omogene

$$\mathbf{w}' = \mathbf{A}\mathbf{w},\ \mathbf{w} = [w_1, w_2, \ldots, w_n]^t,\ \mathbf{w}' = \frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}x}, \qquad (10.1)$$

unde $\mathbf{A}$ este o matrice pătrată constantă, legate de determinarea, cu ajutorul teoriei matricelor, unei matrice fundamentale a sistemului în cauză.

Ideea de bază a teoriei expuse mai jos este aceea de a arăta că o astfel de matrice fundamentală [prin analogie cu ecuația scalară $y' = ay$, $a \in \mathbb{C}$, unde $y = \exp(ax)$ este o soluție particulară cu ajutorul căreia se rezolvă orice problemă legată de integrarea ecuației date] se poate scrie sub forma $\exp(\mathbf{A}x) = \mathrm{e}^{\mathbf{A}x}$; deci vrem să arătăm ce înseamnă $\exp(\mathbf{A}x)$, cum se calculează această funcție și care sînt proprietățile ei principale.

În spațiul vectorial n^2-dimensional al matricelor pătrate de ordin n (pe care îl vom nota prin M_n) se poate introduce o normă, punînd, prin definiție

$$\|\mathbf{A}\| = \max_k \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|, \text{ dacă } \mathbf{A} = [a_{kj}] \in M_n,\ a_{jk} \in \mathbb{C}. \qquad (10.2)$$

Din definiție rezultă direct că $\|\mathbf{A}\| \geqslant 0$, $\|\mathbf{A}\| = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{A} = 0$, $\|c\mathbf{A}\| = |c|\|\mathbf{A}\|$, oricare ar fi $c \in \mathbb{C}$ (deoarece $\max_k \sum_{j=1}^{n} |c\,a_{kj}| = |c| \max_k \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|$) și este valabilă inegalitatea triunghiului $\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$ pentru orice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n$ $\left(\text{deoarece } \max_k \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}+b_{kj}| \leqslant \max_k \sum_{j=1}^{n} (|a_{kj}|+|b_{kj}|) = \max_k \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| + \sum_{j=1}^{n} |b_{kj}| \right) \leqslant \max_k \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| + \max_k \sum_{j=1}^{n} |b_{kj}| \right)$.

Așadar spațiul matricelor pătrate M_n este un *spațiu vectorial normat*.

Fie $(\mathbf{A}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ un șir de matrice din M_n; vom spune că acest șir *converge* către matricea $\mathbf{A} \in M_n$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ se poate defini $N \in \mathbb{R}_+$, $N = N(\varepsilon)$, astfel încît $\|\mathbf{A}_m - \mathbf{A}\| < \varepsilon$ dacă $m \geqslant N$; șirul de matrice $(\mathbf{A}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ se numește *fundamental* (sau *șir Cauchy*) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ se poate găsi $N \in \mathbb{R}_+$, $N = N(\varepsilon)$ astfel încît $\|\mathbf{A}_m - \mathbf{A}_m\| < \varepsilon$ pentru orice $m, m' \geqslant N$. Orice șir convergent de matrice este fundamental (deoarece $\|\mathbf{A}_m - \mathbf{A}_{m'}\| \leqslant \|\mathbf{A}_m - \mathbf{A}\| + \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_{m'}\| < 2\varepsilon$, $m, m' \geqslant N$) și reciproc orice șir fundamental de matrice este convergent către o matrice din M_m (deoarece $|a_{kj}| \leqslant \max_k \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| = \|\mathbf{A}\|$ și deci, dacă $\mathbf{A}_m = [a_{kj}^m]$, va rezulta $|a_{kj}^m - a_{kj}^{m'}| \leqslant \|\mathbf{A}_m - \mathbf{A}_{m'}\|$ și șirurile de numere complexe $(a_{kj}^m)_{m \in \mathbb{N}}$ fiind fundamentale, vor fi convergente: $\lim_{m \to \infty} a_{kj}^m = a_{kj} \in \mathbb{C}$; vom pune $\lim_{m \to \infty} \mathbf{A}_m = \mathbf{A} = [a_{kj}]$).

Așadar, spațiul vectorial normat M_n este și un spațiu complet, deci este un spațiu Banach. De asemenea, avem $\|\mathbf{AB}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\| \leqslant$ (deoarece $\mathbf{AB} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, b_{lj}$, deci $\|\mathbf{AB}\| = \max_k \sum_{j=1}^{n} \left(\left| \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, b_{lj} \right| \right) \leqslant \max_k \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} |a_{kl}\, b_{lj}| \leqslant \max_k \sum_{l=1}^{n} |a_{kl}| \cdot \max_k \sum_{l=1}^{n} |b_{kl}| = \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|$, folosind inegalitatea $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{j=1}^{n} \beta_j$, dacă $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}_+$).

Dacă $\mathbf{v} = [v_1, \ldots, v_n]^t$, pentru concordanță cu norma $\|\mathbf{A}\|$ introdusă, în locul normei euclidiene $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{|v_1|^2 + \ldots + |v_n|^2}$ va fi

mai comod să se utilizeze norma $\|\mathbf{v}\| = \max_k |v_k|$. În această ipoteză va rezulta

$$\|\mathbf{Av}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{v}\|, \quad \mathbf{A} \in M_n, \tag{10.3}$$

cu aceeași justificare ca în cazul $\|\mathbf{AB}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|$.

10.2. Valori și vectori proprii. Forme canonice

Studiul proprietăților matricelor din M_n este considerabil ușurat prin utilizarea vectorilor și valorilor proprii: dacă $\mathbf{A} \in M_n$, se spune că $\mathbf{v} = [v_1, \ldots, v_n]^t$ este un *vector propriu* corespunzînd *valorii proprii* $\lambda \in \mathbb{C}$, dacă $v \neq 0$ și dacă

$$\mathbf{Av} = \lambda \mathbf{v}. \tag{10.4}$$

Problema determinării vectorilor și valorilor proprii oricărui element din M_n este o problemă legată de rezolvarea sistemelor algebrice liniare și omogene; astfel, relația (10.4) este echivalentă cu ecuația $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = 0$, formată din n ecuații liniare și omogene $\sum_{j=1}^{n} (a_{kj} - \lambda \delta_{kj})\, v_j = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, cu necunoscutele $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Cum nu toți v_j pot fi simultan nuli (altfel ar rezulta $\mathbf{v} = 0$, ceea ce contrazice definiția vectorului propriu), trebuie verificată ecuația

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \tag{10.5}$$

($\mathbf{I} = [\delta_{jk}]$ fiind matricea unitate din M_n). Este evident că P este un polinom de grad n și dacă $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sînt rădăcinile sale, cu ordinele de multiplicitate $n_1, n_2, \ldots, n_p$, $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n$, avem $P(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \ldots (\lambda - \lambda_p)^{n_p}$ iar λ_j, $j = 1, \ldots, p$, se numește *valoare proprie de multiplicitate* n a matricei $\mathbf{A}$.

Dacă $\lambda_j \neq \lambda_k$ și dacă $\mathbf{v}^j$ și $\mathbf{v}^k$ sînt vectori proprii corespunzători acestor valori proprii, aceștia sînt liniar independenți (deoarece dacă $\mathbf{v}^j = a\mathbf{v}^k$, $a \in \mathbb{C}$, cum $\mathbf{Av}^j = \lambda_j \mathbf{v}^j$, va rezulta $\mathbf{Av}^j = \mathbf{A}(a\mathbf{v}^k) = a\lambda_j \mathbf{v}^k$, deci $\lambda_j \mathbf{v}^j = a\,\mathbf{Av}^k$ sau $a(\lambda_j \mathbf{v}^j - \mathbf{Av}^k) = 0$; deoarece $a \neq 0$, rezultă $\mathbf{Av}^k = \lambda_j \mathbf{v}^j$, ceea ce nu se poate: $\mathbf{v}^k$ corespunde valorii proprii λ_k, nu lui λ_j, iar $k \neq j$ prin ipoteză).

De aici rezultă că în particular, dacă toate valorile proprii ale matricei $\mathbf{A}$ sînt distincte, vectorii proprii corespunzători $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n$ sînt liniar independenți, deci pot forma o bază în $\mathbb{R}^n$: această bază se numește *bază proprie*.

Notînd cu $\mathbf{V} \in M_n$ matricea ale cărei coloane sînt $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n$, în baza liniar independenței acestor vectori proprii avem $\det \mathbf{V} \neq 0$ și, prin urmare, va exista matricea inversă $\mathbf{V}^{-1}$. Fie acum $\mathbf{\Lambda} \in M_n$, $\mathbf{\Lambda} = \operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$ (adică $\mathbf{\Lambda}$ este matricea pătrată ale cărei elemente sînt toate nule, exceptînd cele de pe diagonala principală care sînt egale cu $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$; altfel scris, $\mathbf{\Lambda} = [\lambda_k \delta_{kj}]$, δ_{kj}, ca de obicei, sînt numerele lui Kronecker). Deoarece, în baza regulelor de calcul cu matrice avem $\mathbf{AV} = \mathbf{A}[\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n] = [\mathbf{Av}^1, \mathbf{Av}^2, \ldots, \mathbf{Av}^n]$, cum $\mathbf{Av}^j = \lambda_j \mathbf{v}^j$, se deduce $\mathbf{AV} = \mathbf{V\Lambda}$, adică

$$\mathbf{A} = \mathbf{V\Lambda V}^{-1} \text{ sau } \mathbf{\Lambda} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{AV}. \tag{10.6}$$

În plus, $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{\Lambda}$, deoarece $\det(\mathbf{V\Lambda V}^{-1}) = (\det \mathbf{V})(\det \mathbf{\Lambda})(\det \mathbf{V}^{-1})$ iar $(\det \mathbf{V})(\det \mathbf{V}^{-1}) = 1$.

În acest mod, s-a arătat că dacă toate valorile proprii ale matricei $\mathbf{A} \in M_n$ sînt distincte, atunci există o matrice nesingulară $\mathbf{V}$, astfel încît matricea $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{AV}$ este o matrice diagonală $\mathbf{\Lambda}$ (și se pot preciza ambele matrice $\mathbf{V}$ și $\mathbf{\Lambda}$). Dacă însă valorile proprii nu sînt toate distincte, atunci, în general, procedeul anterior numai este valabil; acest procedeu rămîne valabil dacă, de exemplu avem situația următoare: valorile proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, $p \leqslant n$, distincte, au ordinele de multiplicitate $n_1, \ldots, n_p$ respectiv iar la fiecare valoare proprie distinctă corespunde un număr de vectori proprii liniar independenți, astfel încît numărul total de vectori proprii liniar independenți să fie egal cu n. În această situație are sens matricea $\mathbf{V}$ construită anterior și rămîn valabile egalitățile (10.6), dar matricea diagonală $\mathbf{\Lambda}$ nu are, evident, toate elementele distincte.

În cazul general se poate demonstra că pentru orice matrice $\mathbf{A} \in M_n$, există o matrice nesingulară $\mathbf{T} \in M_n$ astfel încît $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$ este o matrice de forma

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{k_1}(\lambda_1) & 0 \ldots & 0 \\ 0 & \mathbf{L}_{k_2}(\lambda_2) \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot \ldots & \cdot \\ 0 & 0 \ldots & \mathbf{L}_{k_n}(\lambda_n) \end{bmatrix} \text{ cu } \mathbf{L}_{kj}(\lambda_j) = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_j & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_j \end{bmatrix} \tag{10.7}$$

cu $\mathbf{L}_{k_j}(\lambda_j) \in M_{k_j}$, $k_1 + \ldots + k_n = n$, iar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ nu sînt în mod obligatoriu valori proprii distincte ale matricei $\mathbf{A}$. Membrul drept al primei egalități (10.7) se numește *forma canonică Jordan* a matricei $\mathbf{A}$ (și poate fi demonstrată, de exemplu, prin inducție).

De exemplu, dacă $\mathbf{A} \in M_2$, atunci sînt posibile următoarele forme canonice pentru matricea $\mathbf{A}$:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

iar dacă $\mathbf{A} \in M_3$, putem avea formele canonice

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Dacă $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sînt valorile proprii ale matricei $\mathbf{A} \in M_n$ și $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^q$ sînt vectori proprii ($p \leqslant q$), atunci din egalitatea $\mathbf{Av}^j = \lambda_j \mathbf{v}^j$ va rezulta

$$|\lambda_j| \, \|\mathbf{v}^j\| = \|\lambda_j \mathbf{v}^j\| = \|\mathbf{Av}^j\| \leqslant \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{v}^j\|$$

și deci $|\lambda_j| \leqslant \|\mathbf{A}\|$ pentru orice $j = 1,2, \ldots, p$ (căci $\|\mathbf{v}^j\| > 0$); prin urmare, rezultă inegalitatea $\max_j |\lambda_j| \leqslant \|\mathbf{A}\|$.

10.3. Definirea funcțiilor de matrice

Cu aceste pregătiri, se poate trece la definirea unei funcții de matricea $\mathbf{A} \in M_n$. Cea mai simplă funcție de matrice este funcția polinom; deoarece, dacă $\mathbf{A} \in M_n$, atunci $\mathbf{A}^k \in M_n$, $k \in \mathbb{N}$, în ipoteza că polinomul este

$$p(x) = x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m, \; b_j \in \mathbb{C}$$

prin $p(\mathbf{A})$ se va înțelege matricea următoare:

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^m + b_1\mathbf{A}^{m-1} + \ldots + b_{m-1}\mathbf{A} + b_m\mathbf{I}, \; p(\mathbf{A}) \in M_n. \tag{10.8}$$

Pentru a vedea mai precis cum se prezintă matricea $p(\mathbf{A})$ definită prin (10.8), să presupunem că $\mathbf{A}$ este diagonalizabilă, astfel încît există

$\mathbf{S} \in M_n$, cu proprietatea $\mathbf{A} = \mathbf{SDS}^{-1}$, $\mathbf{D} \in M_n$ fiind matrice diagonală; deoarece $\mathbf{A}^2 = (\mathbf{SDS}^{-1})(\mathbf{SDS}^{-1}) = \mathbf{SD}^2\mathbf{S}^{-1}$ etc. va rezulta

$$p(\mathbf{A}) = p(\mathbf{SDS}^{-1}) = \mathbf{S}\, p(\mathbf{D})\mathbf{S}^{-1},$$

iar dacă $\mathbf{D} = \operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$ avem $p(\mathbf{D}) = \operatorname{diag}\ [p(\lambda_1), p(\lambda_2), \ldots$ $\ldots, p(\lambda_n)]$ şi se obţine egalitatea

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{S}\ \operatorname{diag}[p(\lambda_1),\ p(\lambda_2), \ldots, p(\lambda_n)]\ \mathbf{S}^{-1} \qquad (10.8')$$

care permite generalizarea definiţiei unei funcţii de matrice la orice funcţie care este definită pe mulţimea valorilor proprii (= spectrul) a matricei $\mathbf{A}$ punînd prin definiţie

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{S}\ \operatorname{diag}[f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)]\ \mathbf{S}^{-1} \qquad (10.9)$$

(de reţinut că această definiţie este valabilă numai dacă matricea $\mathbf{A}$ este diagonalizabilă iar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ pot să nu fie toţi distincţi).

Exemple

1. Fie $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2$; rezultă $P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (\lambda-1)^2 - 1 = \lambda(\lambda - 2)$.

Valorile proprii vor fi $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$ şi deoarece sînt distincte, operatorul $\mathbf{A}$ este diagonalizabil.

Deoarece sistemul $(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})\mathbf{v} = 0$ pentru $\lambda = \lambda_1$ şi $\lambda = \lambda_2$ admite soluţiile $\mathbf{v}^1 = [1, 1]^t$, respectiv $\mathbf{v}^2 = [1, -1]^t$, rezultă

$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ şi deci $\mathbf{V}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; cum $\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, vom avea $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1}$ şi deci $f(\mathbf{A}) = \mathbf{V}f(\mathbf{\Lambda})\mathbf{V}^{-1}$.

În particular, $\exp(\mathbf{A}) = \mathrm{e}^{\mathbf{A}} = \mathbf{V}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{V}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^2+1 & \mathrm{e}^2-1 \\ \mathrm{e}^2-1 & \mathrm{e}^2+1 \end{bmatrix}$ iar

$\exp(t\,\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2t}+1 & \mathrm{e}^{2t}-1 \\ \mathrm{e}^{2t}-1 & \mathrm{e}^{2t}+1 \end{bmatrix}$.

2. Dacă P este polinomul caracteristic al matricei $\mathbf{A} \in M_n$, atunci $P(\mathbf{A}) = 0$, cel puţin în ipoteza că $\mathbf{A}$ este o matrice diagonalizabilă, deoarece $P(\mathbf{A}) = \mathbf{S}\ \operatorname{diag}\ [P(\lambda_1), \ldots$ $\ldots, P(\lambda_r)]\ \mathbf{S}^{-1} = 0$, fiindcă $P(\lambda_1) = 0, \ldots, P(\lambda_r) = 0$, $r \leqslant n$.

3. În ipotezele de la exemplul 2, dacă $\mathbf{A}^{-1}$ există, atunci $\mathbf{A}^{-1} = \frac{-1}{b_n}\ [\mathbf{A}^{n-1} + b_1\mathbf{A}^{n-2} + \ldots + b_{n-1}\mathbf{I}]$, dacă $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sînt coeficienţii polinomului caracteristic $P(\lambda) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \ldots + b_n$, deoarece din $P(\mathbf{A}) = 0$ rezultă $\mathbf{A}^n + b_1\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + b_{n-1}\mathbf{A} + b_n\mathbf{I} = 0$ şi prin înmulţire cu $\mathbf{A}^{-1}$ se obţine egalitatea amintită pentru $\mathbf{A}^{-1}$.

Această formulă este utilă uneori deoarece este mai simplu de calculat $\mathbf{A}^j$ (dacă se cunoaşte polinomul caracteristic); în plus, rezultă că matricea inversă este un polinom de grad $n-1$ în $\mathbf{A}$ (faptul că $\mathbf{A}^{-1}$ există este echivalent cu $b_n \neq 0$, deoarece $b_n = P(0) = \det\mathbf{A}$).

Pentru a putea defini funcţiile de matricea $\mathbf{A}$ şi în cazurile excluse anterior (adică pentru matricele care nu sînt diagonalizabile), vom presupune f funcţie analitică în cercul $|z| < R$ şi deoarece $g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$, $a_j \in \mathbb{C}$, vom scrie prin definiţie

$$g(\mathbf{A}) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, \mathbf{A}^j, \qquad (10.10)$$

seria din membrul drept fiind convergentă dacă $\|\mathbf{A}\| < R$ (deoarece se ştie că o serie de puteri este absolut şi uniform convergentă pentru orice z cu $|z| < R$ şi deci, notînd $\mathbf{B}_m = \sum_{j=0}^{m} a_j\mathbf{A}^j$, avem

$$\|\mathbf{B}_m - \mathbf{B}_{m'}\| = \Big\|\sum_{j=m+1}^{m'} a_j\,\mathbf{A}^j\Big\| \leqslant \sum_{j=m+1}^{m'} |a_j|\ \|\mathbf{A}\|^j < \varepsilon,\ m < m'$$

pentru $\|\mathbf{A}\| < R$, $(\mathbf{B}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ fiind şirul sumelor parţiale ale seriei (10.10)).

Dacă $\mathbf{A}$ este diagonalizabilă, atunci funcţia $g(\mathbf{A})$ definită prin (10.10) coincide cu definiţia anterioară (10.9); într-adevăr, deoarece $|\lambda_j| \leqslant \|\mathbf{A}\| < R$, are sens $g(\lambda_j)$ iar dacă $\mathbf{A} = \mathbf{SDS}^{-1}$, $\mathbf{D}$ fiind o matrice diagonală, rezultă din (10.10)

$$g(\mathbf{A}) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\,(\mathbf{SDS}^{-1})^j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\,\mathbf{S}\,\mathbf{D}^j\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\,\mathbf{D}^j\Big)\,\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}g(\mathbf{D})\mathbf{S}^{-1}.$$

Pentru anumite tipuri de matrice, seria (10.10) este uşor de calculat; astfel, dacă matricea $\mathbf{A}$ este *nilpotentă*, adică există un $p \in \mathbb{N}$

astfel încît $\mathbf{A}^p = 0$, atunci deoarece $\mathbf{A}^j = 0$ pentru orice $j \geqslant p$, seria (10.10) se întrerupe şi se reduce la un polinom.

Exemple

4. Dacă

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_3, \text{ rezultă } \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{A}^3 = 0$$

iar polinomul caracteristic este $P(\lambda) = \lambda^3$, deci $\lambda = 0$ este valoare proprie de ordinul trei; rezultă

$$g(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{A} + a_2\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(0) & g'(0) & \frac{1}{2}g''(0) \\ 0 & g(0) & g'(0) \\ 0 & 0 & g(0) \end{bmatrix}$$

În particular,

$$\exp(\mathbf{A}x) = \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{1}{2}x^2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Funcţia $g(\mathbf{A})$ are sens dacă raza de convergenţă a seriei este pozitivă (oricît de mică). Prin urmare, conform cu cele expuse mai sus, dacă matricea $\mathbf{A}$ nu este diagonalizabilă, atunci presupunîndu-se funcţia g analitică pentru $|z| \leqslant R$ şi $\|\mathbf{A}\| < R$, se poate defini funcţia $g(\mathbf{A},)$ pentru orice $\mathbf{A}$ cu $|\lambda_j| < R$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ fiind valorile proprii ale matricei $\mathbf{A}$; rămîne deci de arătat cum se defineşte funcţia $g(\mathbf{A})$ dacă g este analitică pentru $|z| < R$ iar $\|\mathbf{A}\| > R$.

În acest scop se introduce *operatorul rezolvant* al matricei $\mathbf{A}$, notat prin $\mathbf{R}_z$ şi definit prin

$$\mathbf{R}_z = (\mathbf{A} - z\,\mathbf{I})^{-1} \tag{10.11}$$

şi este evident că $\mathbf{R}_z$ este o matrice care depinde de $z \in \mathbb{C}$, fiind o funcţie meromorfă în $\mathbb{C}$, avînd poluri în punctele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ (valorile proprii ale matricei $\mathbf{A}$), deoarece matricea inversă are elementele împărţite la $\det(\mathbf{A} - z\,\mathbf{I}) = P(z)$; planul complex $\mathbb{C}$ mai

puţin punctele $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ poartă denumirea de *mulţimea rezolventă* a matricei $\mathbf{R}_z$.

Prin definiţie, matricea $g(\mathbf{A})$ este dată de egalitatea

$$g(\mathbf{A}) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_\gamma \mathbf{R}_z\, g(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma (\mathbf{A} - z\,\mathbf{I})^{-1}\, g(z)\,\mathrm{d}z, \tag{10.12}$$

unde γ este un contur de integrare care închide la interior spectrul matricei $\mathbf{A}$ şi nu include singularităţile lui g.

Se poate face observaţia că de fapt formula (10.12), care se numeşte *integrala Dunford-Taylor*, nu este altceva decît formula lui Cauchy din teoria funcţiilor monogene $f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$, transcrisă pentru matrice; în plus, deoarece produsul $\mathbf{R}_z g(z)$ este o matrice ale cărei elemente vor fi funcţii meromorfe în domeniul de olomorfie a lui g, integrala din (10.12) se poate calcula cu ajutorul teoriei reziduurilor.

Formula (10.12) va fi justificată dacă arătăm că în situaţiile anterioare pentru care s-a construit matricea $g(\mathbf{A})$ rezultatele corespunzătoare vor coincide; or, dacă g este olomorfă pentru $|z| < R$ iar $\|\mathbf{A}\| < R$, deoarece

$$h(x) = \frac{1}{z - x} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1 - \frac{x}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{z^j},$$

seria fiind absolut şi uniform convergentă pentru $|x| < |z|$, va rezulta

$$h(\mathbf{A}) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{z}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^j}{z^j},$$

egalitate valabilă pentru $\|\mathbf{A}\| < |z|$. Calculînd integrala

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=r}\mathbf{R}_z\, g(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=r} h(\mathbf{A})\, g(z)\,\mathrm{d}z,$$

unde $|z| = r > \|\mathbf{A}\|$, găsim

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z|=r} \mathbf{R}_z\, g(z)\, \mathrm{d}z = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{A}_j \left[\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{z=r} \frac{g(z)}{z^{j+1}}\, \mathrm{d}z \right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g^{(j)}(0)}{j!}\, \mathbf{A}^j = g(\mathbf{A}),$$

deoarece $\frac{j!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z|=r} \frac{g(z)}{z^{j+1}}\, \mathrm{d}z = g^{(j)}(0)$.

Evident rezultatele vor fi identice dacă $\mathbf{A}$ este o matrice diagonalizabilă; chiar şi un calcul direct arată că din (10.12) se obţine

$$g(\mathbf{A}) = g(\mathbf{SDS}^{-1}) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} (\mathbf{SDS}^{-1} - z\mathbf{I})^{-1}\, g(z)\, \mathrm{d}z =$$

$$= \mathbf{S} \left[\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} (\mathbf{D} - z\,\mathbf{I})^{-1}\, g(z)\, \mathrm{d}z \right] \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S} g(\mathbf{D}) \mathbf{S}^{-1}$$

deoarece $\mathbf{SDS}^{-1} - z\mathbf{I} = \mathbf{S}(\mathbf{D} - z\mathbf{I})\mathbf{S}^{-1}$ iar

$$(\mathbf{SDS}^{-1} - z\mathbf{I})^{-1} = [\mathbf{S}(\mathbf{D} - z\mathbf{I})\mathbf{S}^{-1}]^{-1} = (\mathbf{S}^{-1})^{-1}(\mathbf{D} - z\mathbf{I})^{-1}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}(\mathbf{D} - z\mathbf{I})^{-1}\,\mathbf{S}^{-1}$$

10.4. Construcţia efectivă a funcţiilor de matrice

Evident, consideraţiile anterioare au un caracter mai mult teoretic, acestea nearătînd de fapt decît posibilitatea definirii, în anumite ipoteze asupra lui g, a funcţiei $g(\mathbf{A})$ care este o matrice pătrată de acelaşi ordin ca şi matricea $\mathbf{A}$.

Se pot însă stabili şi algoritmi pentru construcţia efectivă a matricei $g(\mathbf{A})$. Pentru aceasta, vom considera din nou matricea $\mathbf{R}_z$ definită prin (10.11), unde $z \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ fiind valorile proprii distincte ale matricei $\mathbf{A}$; deoarece $\mathbf{R}_z = (\mathbf{A} - z\mathbf{I})^{-1}$, din modul de construcţie al matricei inverse, rezultă $\mathbf{R}_z = \frac{\mathbf{B}(z)}{P(z)}$, unde $\mathbf{B}$ este o matrice pătrată de ordin n ale cărei elemente sînt polinoame de grad cel mult $n-1$ în z iar P este polinomul caracteristic al matricei $\mathbf{A}$. Scriind $\mathbf{B}$ şi P sub forma

$$\mathbf{B}(z) = \mathbf{B}_1 z^{n-1} + \mathbf{B}_2 z^{n-1} + \ldots + \mathbf{B}_n,\ P(z) = z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_n, \tag{10.13}$$

$\mathbf{B}_j \in M_n$, $p_j = \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, egalitatea $(\mathbf{A} - z\mathbf{I})^{-1} = \frac{\mathbf{B}(z)}{P(z)}$ se poate scrie sub forma următoare :

$$P(z)\,\mathbf{I} = (\mathbf{A} - z\mathbf{I})\,\mathbf{B}(z), \tag{10.14}$$

care este o identitate în z, ceea ce conduce la sistemul de egalităţi matriceale

$$\mathbf{AB}_j - \mathbf{B}_{j+1} = p_j\mathbf{I},\ j = 0, 1, \ldots, n,\ \text{cu}\ \mathbf{B}_0 = \mathbf{0},\ p_0 = 1, \tag{10.14'}$$

care permite determinarea succesivă a matricelor $\mathbf{B}_j$ şi este uşor de stabilit că matricea $\mathbf{B}$ se poate scrie sub forma

$$\mathbf{B}(z) = b_0(z)\mathbf{I} + b_1(z)\mathbf{A} + \ldots + b_{n-1}(z)\mathbf{A}^{n-1} \tag{10.15}$$

cu b_j polinoame de grad cel mult $j-1$ în variabila z.

Dacă matricea $\mathbf{B}$ şi polinomul caracteristic sînt astfel încît există un polinom Q cu proprietatea

$$P(z) = Q(z)P_1(z), \qquad \mathbf{B}(z) = Q(z)\mathbf{B}_1(z), \tag{10.16}$$

atunci polinomul P_1 poartă denumirea de *polinom minimal* al matricei $\mathbf{A}$; din (10.16) rezultă $\mathbf{R}_z = \frac{\mathbf{B}_1(z)}{P_1(z)}$ iar formula (10.12) de definiţie a funcţiei $g(\mathbf{A})$ devine

$$g(\mathbf{A}) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{\mathbf{B}_1(z)\, g(z)\, \mathrm{d}z}{P_1(z)}. \tag{10.12'}$$

De aici rezultă cîteva consecinţe pentru funcţiile de matricea $\mathbf{A}$:

1) $P_1(\mathbf{A}) = 0$, deoarece, punînd în (10.12') $g = P_1$, $\mathbf{B}_1$ fiind olomorfă în interiorul lui γ, integrala este nulă.

2) $P(\mathbf{A}) = 0$, deoarece din (10.16) rezultă $P(\mathbf{A}) = Q(\mathbf{A})\, P_1(\mathbf{A}) = 0$. (aceasta este teorema Hamilton-Cayley pentru cazul unei matrice oarecare).

3) Orice funcţie de matrice $\mathbf{A}$ este de fapt un polinom (de grad cel mult egal cu $\deg P_1$) în matricea $\mathbf{A}$, deoarece din (10.15) rezultă, ţinînd seama de a doua egalitate (10.16), egalitatea

$$\mathbf{B}_1(z) = c_0\mathbf{I} + c_1\mathbf{A} + \ldots + c_{m-1}\mathbf{A}^{m-1} \text{ cu } m = \deg P_1 \leqslant n,\ \deg c_j \leqslant j-1, \tag{10.16'}$$

care înlocuită în (10.12') conduce la relaţia

$$g(\mathbf{A}) = \sum_{j=0}^{m-1} d_j\, \mathbf{A}^j,\ d_j = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{c_j(z)\, g(z)}{P_1(z)}\, dz. \tag{10.17}$$

Acest ultim rezultat este fundamental în teoria funcţiilor de matrice :

Pentru a găsi matricea $g(\mathbf{A})$ este suficient să se determine polinomul $\sum_{j=0}^{m-1} d_j z^j$ avînd gradul $m-1 \leqslant n-1$, m fiind gradul polinomului minimal ; evident, coeficienţii d_j se pot determina cu ajutorul relaţiilor (10.17) şi atunci $g(\mathbf{A}) = \sum_{j=0}^{m-1} d_j \mathbf{A}^j$.

Formulele (10.17) pentru d_j nu sînt însă prea comode şi de aceea se pot imagina alte procedee pentru determinarea acestora. Astfel, dacă se presupun valorile proprii ale matricei $\mathbf{A}$ distincte, se poate determina un polinom r de gradul $n-1$ (în acest caz polinomul minimal are gradul n) din condiţiile

$$r(\lambda_j) = g(\lambda_j), \qquad j = 1, 2, \ldots, n\,; \tag{10.18}$$

va rezulta că diferenţa $g-r$, deoarece se anulează pentru $\lambda = \lambda_j$, $j = 1, \ldots, n$ se divide la polinomul caracteristic şi deci are loc egalitatea

$$g(z) = q(z)P(z) + r(z), \tag{19.19}$$

din care rezultă $g(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$. Aşadar, polinomul r determinat din condiţiile (10.18) va fi polinomul care apare în (10.17).

În cazul în care valorile proprii ale matricei $\mathbf{A}$ sînt $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$, cu anumite ordine de multiplicitate, cînd polinomul minimal va fi de forma

$P_1(z) = (z-\lambda_1)^{m_1}(z-\lambda_2)^{m_2}\ldots(z-\lambda_q)^{m_q}$, $m_1 + m_2 + \ldots + m_q = m \leqslant n$,

atunci în locul condiţiilor (10.18) vor trebui utilizate, evident, condiţiile

$$\left.\frac{d^j}{dz^j} r(z)\right|_{\lambda=\lambda_k} = \left.\frac{d^j}{dz^j} g(z)\right|_{\lambda=\lambda_k},\ \begin{matrix} j = 0, 1, \ldots, m_k - 1, \\ k = 1, 2, \ldots, q. \end{matrix} \tag{10.18'}$$

Exemple

5. Dacă $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \in M_2$, deoarece $P(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda-5)$, polinomul minimal este $P(\lambda)$ şi rămîne de găsit polinomul de gradul întîi $r(z) = a + bz$, din condiţiile $r(3) = g(3)$, $r(5) = g(5)$; se obţine $a = \frac{5}{2}g(3) - \frac{3}{2}g(5)$, $b = -\frac{1}{2}g(3) + \frac{1}{2}g(5)$. Prin urmare,

$$g(\mathbf{A}) = \left[\frac{5}{2}g(3) - \frac{3}{2}g(5)\right]\mathbf{I} + \left[\frac{1}{2}g(5) - \frac{1}{2}g(3)\right]\mathbf{A} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{2}g(3) - \frac{1}{2}g(5) & \frac{3}{2}g(5) - \frac{3}{2}g(3) \\ \frac{1}{2}g(3) - \frac{1}{2}g(5) & \frac{3}{2}g(5) - \frac{1}{2}g(3) \end{bmatrix}.$$

În particular

$$e^{\mathbf{A}x} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{5x} & \frac{3}{2}e^{5x} - \frac{3}{2}e^{3x} \\ \frac{1}{2}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{5x} & \frac{3}{2}e^{5x} - \frac{1}{2}e^{3x} \end{bmatrix},$$

$$\ln \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 5 & \frac{3}{2}\ln 5 - \frac{3}{2}\ln 3 \\ \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 5 & \frac{3}{2}\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\ln\frac{27}{5} & \frac{3}{2}\ln\frac{5}{3} \\ \frac{1}{2}\ln\frac{3}{5} & \frac{1}{2}\ln\frac{125}{3} \end{bmatrix},$$

$$x^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^5 & \frac{3}{2}x^5 - \frac{3}{2}x^3 \\ \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^5 & \frac{3}{2}x^5 - \frac{1}{2}x^3 \end{bmatrix}$$

6. Dacă $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\in M_3$, avem $P(z)=-z^3$, $\mathbf{B}(z)=\begin{bmatrix}z^2&0&0\\0&z^2&z\\0&0&z^2\end{bmatrix}$,

deci $P_1(z)=z^2$, deoarece P și $\mathbf{B}$ se divid prin z. Rezultă că $r(z)=a+bz$, a și b determinîn du-se din condițiile $r(0)=g(0)$, $r'(0)=g'(0)$; deci $a=g(0)$, $b=g'(0)$ și prin urmare

$$g(\mathbf{A})=r(\mathbf{A})=g(0)\,\mathbf{I}+g'(0)\,\mathbf{A}=\begin{bmatrix}g(0)&0&0\\0&g(0)&g'(0)\\0&0&g(0)\end{bmatrix}.$$

În particular,

$$e^{\mathbf{A}x}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&x\\0&0&1\end{bmatrix},$$

iar $x^{\mathbf{A}}$ și $\ln \mathbf{A}$ nu au sens deoarece x^z și $\ln z$ nu sînt olomorfe pentru $z=0$.

10.5. Proprietățile exponențialei de matricea A

Dacă $\mathbf{A}\in M_n$, atunci, deoarece funcția $\exp(z)=e^z$ este o funcție întreagă, are sens matricea $\exp(\mathbf{A})$ sau $\exp(x\mathbf{A})$; conform cu integrala Dunford-Taylor (10.12), vom avea

$$\exp(x\mathbf{A})=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathbf{R}_z\,e^{xz}\,dz, \tag{10.19}$$

unde γ este un contur de integrare care include la interior spectrul matricei $\mathbf{A}$. Din (10.19) rezultă egalitatea fundamentală verificată de matricea $\exp(x\mathbf{A})$ și anume

$$[\exp(x\mathbf{A})]'=\mathbf{A}\exp(x\mathbf{A}). \tag{10.19'}$$

Într-adevăr, din (10.19) rezultă

$$\frac{d}{dx}\exp(x\mathbf{A})=\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dx}\int_\gamma \mathbf{R}_z e^{xz}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathbf{R}_z(ze^{xz})\,dz=\mathbf{A}e^{x\mathbf{A}},$$

deoarece integrala $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathbf{R}_z z e^{xz}dz$ este integrala Dunford-Taylor pentru funcția $g(z)=ze^{xz}$.

Comparînd (10.19') cu ecuația matriceală

$$\mathbf{w}'=\mathbf{A}\mathbf{w}+\mathbf{g},\quad \mathbf{w}=[w_1,w_2,\ldots,w_n]^t,\ \mathbf{g}=[g_1,g_2,\ldots,g_n]^t, \tag{10.20}$$

rezultă că $\exp(x\mathbf{A})$ este o matrice fundamentală pentru sistemul diferențial liniar cu coeficienți constanți (10.20); deoarece $\exp(x\mathbf{A})=\mathbf{I}$ pentru $x=0$, fiindcă din (10.19) rezultă

$$\exp(x\mathbf{A})|_{x=0}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathbf{R}_z\cdot 1\,dz=\mathbf{I},$$

dacă se atașează problema Cauchy

$$\mathbf{w}(x_0)=\mathbf{w}_0, \tag{10.20'}$$

matricea fundamentală normată va fi $\exp[(x-x_0)\,\mathbf{A}]$ și deci soluția sistemului (10.20), în baza unui rezultat cunoscut (vezi cap. 9), va fi

$$\mathbf{w}(x)=\exp[(x-x_0)\,\mathbf{A}]\mathbf{w}_0+\int_{x_0}^{x}\exp[(x-t)\mathbf{A}]\mathbf{g}(t)dt, \tag{10.21}$$

deci, în momentul în care s-a determinat matricea $\exp(x\mathbf{A})$, problema Cauchy (10.20') pentru sistemul din (10.20) este complet rezolvată.

Exemple

7. În cazul în care matricea $\mathbf{A}$ din (10.20) este egală cu $\begin{bmatrix}2&3\\-1&6\end{bmatrix}$, matricea $\exp(x\mathbf{A})$ a fost găsită la exemplul 5 de la 10.4. Dacă $\mathbf{w}(0)=[a,b]^t$ și $\mathbf{g}=[e^{2x},e^{5x}]^t$ din (10.20), găsim soluția

$$\mathbf{w}(x)=\exp(x\mathbf{A})\mathbf{w}_0+\int_{x_0}^{x}\exp[(x-\tau)\mathbf{A}]\,[e^{2\tau},e^{5\tau}]^t\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3e^{3x}-e^{5x}&3e^{5x}-3e^{3x}\\e^{3x}-e^{5x}&3e^{5x}-e^{3x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}+$$

$$+\int_0^x\begin{bmatrix}3e^{3(x-\tau)}-e^{5(x-\tau)}&3e^{(5x-\tau)}-3e^{3(x-\tau)}\\e^{3(x-\tau)}-e^{5(x-\tau)}&3e^{5(x-\tau)}-e^{3(x-\tau)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{2\tau}\\e^{5\tau}\end{bmatrix}d\tau.$$

8. Dacă în (10.20) matricea $\mathbf{A}$ coincide cu matricea din exemplul 6 de la 10.4, atunci $\exp(x\mathbf{A})=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&x\\0&0&1\end{bmatrix}$ și deci soluția (10.21) corespunzătoare va fi

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x-x_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \int_{x_0}^{x} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x-t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ g_3(t) \end{bmatrix} \mathrm{d}t =$$

$$= \begin{bmatrix} a + \int_{x_0}^{x} g_1(t)\,\mathrm{d}t \\ b + c(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} [g_2(t) + (x-t)\,g_3(t)]\,\mathrm{d}t \\ c + \int_{x_0}^{x} g_3(t)\,\mathrm{d}t \end{bmatrix}$$

Din definiţie se pot obţine şi alte proprietăţi ale matricei exp (**A**). Astfel, deoarece $\exp(x\mathbf{A})$ este o aplicaţie liniară a spaţiului $\mathbb{R}^n$ în el însuşi (dacă elementele lui **A** sînt reale) sau a spaţiului $\mathbb{C}^n$ în el însuşi care depinde de un parametru real x, este uşor de arătat că familia de aplicaţii liniare $\exp(x\mathbf{A}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}$, generează un grup cu un parametru de transformări liniare ale lui $\mathbb{R}^n$; pentru aceasta trebuie arătat că $\exp(x\mathbf{A})$ este derivabilă în raport cu x, ceea ce a fost stabilit mai înainte, şi că verifică egalitatea

$$\exp[(x_1+x_2)\mathbf{A}] = \exp(x_1\mathbf{A})\exp(x_2\mathbf{A}) \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \tag{10.22}$$

Or din formula integrală Dunford-Taylor rezultă egalităţile

$$\exp[(x_1 + x_2)\mathbf{A}] = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \mathbf{R}_z^{(x_1+x_2)z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \mathbf{R}_z\, \mathrm{e}^{x_1 z} \cdot \mathrm{e}^{x_2 z} \mathrm{d}z =$$

$$= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \mathbf{R}_z \exp(x_1 z) \cdot \exp(x_2 z)\,\mathrm{d}z = \exp(x_1\mathbf{A}) \cdot \exp(x_2\mathbf{A}),$$

deoarece aici $g(z) = g_1(z) \cdot g_2(z)$ cu $g_j(z) = \exp(x_j z)$, $j = 1, 2$.

Egalitatea (10.22) fiind valabilă pentru orice x_1, x_2 din $\mathbb{R}$ (sau din $\mathbb{C}$), în particular, pentru $x_2 = -x_1$, deoarece $\exp(0 \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{I}$, se obţine $\mathbf{I} = \exp(x_1\mathbf{A}) \cdot \exp(-x_1\mathbf{A})$, egalitate care arată că $[\exp(x_1\mathbf{A})]^{-1} = \exp(-x_1\mathbf{A})$ [cu alte cuvinte matricea $\exp(x\mathbf{A})$ este nesingulară pentru orice $x \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ şi orice $\mathbf{A} \in M_n$].

O altă proprietate a grupului de aplicaţii $\mathfrak{g}_x = \exp(x\mathbf{A})$ este dată de egalitatea

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathfrak{g}_x - I}{x} = \frac{\mathrm{d}\mathfrak{g}_x}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=0} = \mathbf{A},$$

deoarece $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp(x\mathbf{A}) = \mathbf{A}\exp(x\mathbf{A})$, şi din această cauză **A** poartă denumirea de *operator generator* (sau *generator infinitezimal*) al grupului $\mathfrak{g}_x$; reciproc, dacă $\mathfrak{g}_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este un grup cu un parametru de transformări liniare ale spaţiului $\mathbb{R}^n$, atunci există $\mathbf{A} \in M_n$, astfel încît $\mathfrak{g}_x = \exp(x\mathbf{A})$, deoarece din proprietatea de derivare şi proprietatea de grup rezultă

$$\mathfrak{g}_x' = \lim_{t\to 0} \frac{\mathfrak{g}_{x+t} - \mathfrak{g}_x}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\mathfrak{g}_t - \mathbf{I}}{t}\,\mathfrak{g}_x = \mathbf{A}\,\mathfrak{g}_x,$$

notînd $\mathbf{A} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{t}(\mathfrak{g}_t - \mathbf{I})$ iar soluţia ecuaţiei $\mathfrak{g}_x' = \mathbf{A}\,\mathfrak{g}_x$ va fi $\mathfrak{g}_x\,\mathbf{w}_0 = \exp(x\mathbf{A})\mathbf{w}_0$, dacă se cunoaşte vectorul iniţial $\mathbf{w}_0$.

În fine, alte proprietăţi ale exponenţialei sînt exprimate prin egalitatea

$$\exp(x\mathbf{A}) = \lim_{m\to\infty} \left(I + \frac{x\mathbf{A}}{m}\right)^m, \tag{10.22'}$$

deoarece

$$\exp(x\mathbf{A}) - \left(I + \frac{x\mathbf{A}}{m}\right)^m = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \mathbf{R}_z \left[\mathrm{e}^{xz} - \left(1 + \frac{xz}{m}\right)^m\right] \mathrm{d}x$$

iar pentru $m \to \infty$, $\left(1 + \dfrac{xz}{m}\right)^m \to \mathrm{e}^{zx}$, şi prin egalităţile

$$\mathbf{A} = \ln(\exp\mathbf{A}),\ \exp(\ln\mathbf{A}) = \mathbf{A}, \tag{10.22''}$$

ultima fiind valabilă dacă $\det\mathbf{A} \neq 0$, deoarece

$$\ln(\exp\mathbf{A}) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \mathbf{R}_z \ln \mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \mathbf{R}_z \cdot z\,\mathrm{d}z = \mathbf{A}$$

iar

$$\exp(\ln \mathbf{A}) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathbf{R}_z \cdot e^{\ln z}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathbf{R}_z \cdot z\,dz;$$

în plus singularităţile logaritmului netrebuind să coincidă cu valorile proprii ale matricei $\mathbf{A}$ iar $z=0$ fiind singura singularitate pentru $\ln z$, $z \in \mathbb{C}$, trebuie să avem $\lambda_j \neq 0$, deci $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Cu ajutorul noţiunilor anterioare se pot integra şi alte tipuri de sisteme diferenţiale de ordinul întîi, cum ar fi sistemul

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{XB},\ \mathbf{X}(x)\Big|_{x=0} = \mathbf{X}_0,\ \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{X}_0 \in M_n \qquad (20.23)$$

pentru care este suficientă substituţia $\mathbf{X} = \exp(x\mathbf{A})\mathbf{Y}$ ($\mathbf{X}$ şi $\mathbf{Y}$ sînt matrice pătrate), deoarece utilizînd egalitatea

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\exp(x\mathbf{A})\,\mathbf{Y} + \exp(x\mathbf{A})\,\mathbf{Y}' = \mathbf{AX} + \exp(x\mathbf{A})\,\mathbf{X}'$$

din (10.23) se obţine ecuaţia matriceală

$$\exp(x\mathbf{A})\mathbf{Y}' = \exp(x\mathbf{A})\mathbf{YB}$$

care este echivalentă cu ecuaţia matriceală $\mathbf{Y}' = \mathbf{YB}$, deoarece $\det \exp(x\mathbf{A}) \neq 0$, la care se adaugă condiţia iniţială $\mathbf{Y}_{x=0} = \mathbf{X}_0$; soluţia se poate exprima evident prin egalitatea $\mathbf{Y}(x) = \mathbf{X}_0 e^{\exp(\mathbf{XB})}$, ceea ce face ca soluţia problemei (10.23) să fie

$$\mathbf{X}(x) = \exp(x\mathbf{A})\mathbf{X}_0\exp(\mathbf{XB}). \qquad (10.23')$$

Dacă în (10.23) condiţia iniţială se calculează pentru $x=x_0$ (nu pentru $x=0$), atunci (10.23′) rămîne valabilă, dar punînd $x-x_0$ în loc de x.

Se pot integra şi sistemele diferenţiale de forma

$$x^m\mathbf{w}' = \mathbf{Aw},\ m \in \mathbb{N},\ \mathbf{A} \in M_n,\ x \neq 0, \qquad (10.24)$$

pentru care o matrice fundamentală va fi $\mathbf{W}(x) = x^{\mathbf{A}}$, dacă $m=1$ (şi evident $\det \mathbf{A} \neq 0$), sau $\mathbf{W}(x) = \exp\left(\frac{x^{1-m}}{1-m}\mathbf{A}\right)$, dacă $m > 1$,

fiindcă

$$(x^{\mathbf{A}})' = \mathbf{A}x^{\mathbf{A}-1} = \frac{1}{x}\mathbf{A}x^{\mathbf{A}}$$

deoarece, derivînd formula $x^{\mathbf{A}} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathbf{R}_z\, x^z dz$, se obţine

$$(x^{\mathbf{A}})' = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathbf{R}_z\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^z\right)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathbf{R}_z\, zx^{z-1}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{x}\mathbf{R}_z\, zx^z dz = \frac{1}{x}\mathbf{A}x^{\mathbf{A}};$$

de asemenea

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp\left(\frac{x^{1-m}}{1-m}\mathbf{A}\right) = x^m\exp\left(\frac{x^{1-m}}{1-m}\mathbf{A}\right),\ m>1,$$

prin aceleaşi calcule ca şi în cazul anterior,

Spre deosebire de sistemele considerate în cap. 9 sistemele diferenţiale de forma (10.24) au particularitatea că punctul $x = 0$ este un punct singular al acestora, deci soluţiile fundamentale anterioare trebuie considerate fie pentru $x < 0$ fie pentru $x > 0$ (studiul acestora în vecinătatea lui $x=0$ se va face ulterior).

Dacă $m = -1, -2, \ldots$, sistemul (10.24) va fi

$$w' = x^{m_1}\mathbf{A}w,\ m_1 \in \mathbb{N}\ (m_1 = -m)$$

şi se verifică uşor că matricea $W(x) = \exp\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\mathbf{A}\right)$ va fi o matrice fundamentală a acestui sistem.

10.6. Sisteme periodice

Fie un sistem diferenţial liniar şi omogen de ordinul întîi

$$\mathbf{w}' = \mathbf{A}(x)\,\mathbf{w},\quad x \in J, \qquad (10.25)$$

unde $\mathbf{A} \in M_n$ este o matrice continuă pe $J \subset \mathbb{R}$, cu valori complexe.

Dacă există $p \in \mathbb{R}_+$ astfel încît $\mathbf{A}(x+p) = \mathbf{A}(x)$ pentru orice $x \in J$, atunci se spune că sistemul (10.25) este un sistem periodic cu perioada p; pentru sistemele periodice este importantă teorema următoare:

Teorema 10.1 (*Floquet*). *Dacă sistemul* (10.25) *este periodic cu perioada* $p > 0$, *atunci orice matrice fundamentală a acestui sistem, fie aceasta* $\mathbf{W}$, *se poate scrie sub forma*

$$\mathbf{W}(x) = \mathbf{W}_1(x) \exp(x\mathbf{R}), \tag{10.26}$$

unde $\mathbf{W}_1$ *este o matrice periodică cu perioada* p (*din* M_n) *iar* $\mathbf{R} \in M_n$ *este o matrice constantă.*

⌐ Deoarece $\mathbf{W}$ este o matrice fundamentală a sistemului (10.25), vom avea $\mathbf{W}'(x) = \mathbf{A}(x)\ \mathbf{W}(x)$, iar deoarece $\mathbf{A}(x+p) = \mathbf{A}(x)$, va rezulta

$$\mathbf{W}'(x+p) = \mathbf{A}(x+p)\mathbf{W}(x+p) = \mathbf{A}(x)\mathbf{W}(x+p),$$

ceea ce înseamnă că matricea $\mathbf{W}(x+p)$ este de asemenea o matrice fundamentală pentru sistemul considerat; cum orice matrice fundamentală se deduce din alta prin înmulțire la dreapta cu o matrice constantă din M_n, vom avea egalitatea

$$\mathbf{W}(x+p) = \mathbf{W}(x)\mathbf{C}, \qquad \mathbf{C} \in M_n,$$

$\mathbf{C}$ fiind o matrice constantă.

Cum $\det \mathbf{W}(x+p) = \det \mathbf{W}(x) \cdot \det \mathbf{C}$, rezultă $\det \mathbf{C} \neq 0$ și deci va exista o matrice $\mathbf{R}$ astfel încît $\mathbf{C} = \exp(\mathbf{R}p)$ $\left(\text{sau } \mathbf{R} = \frac{1}{p} \ln \mathbf{C}\right)$; dacă se definește matricea $\mathbf{W}_1$ cu ajutorul lui (10.26), adică punînd

$$\mathbf{W}_1(x) = \mathbf{W}(x) \exp(-x\mathbf{R}),$$

va rezulta

$$\mathbf{W}_1(x+p) = \mathbf{W}(x+p)\exp(-x\mathbf{R} - p\mathbf{R}) = [\mathbf{W}(x+p)\exp(-p\mathbf{R})]\exp(-x\mathbf{R}) =$$

$$= \{[\mathbf{W}(x\mathbf{C})]\exp(-p\mathbf{R})\}\exp(-x\mathbf{R}) = \mathbf{W}(x)\exp(-x\mathbf{R}),$$

deoarece $\mathbf{C}\exp(-p\mathbf{R}) = \mathbf{I}$. Prin urmare, s-a obținut egalitatea $\mathbf{W}_1(x+p) = \mathbf{W}_1(x)$. ⌙

Este ușor de văzut că matricele $\mathbf{R}$ și $\mathbf{W}_1$ care apar în teorema 10.1 nu sînt unic determinate; astfel, înlocuind $\mathbf{W}_1$ prin $\mathbf{W}_1(x)\exp\left(-\frac{2\pi i}{p}x\right)$ și $\mathbf{R}$ prin $\mathbf{R} + \frac{2\pi i}{p}\mathbf{I}$, prin efectuarea produsului se obține $\left[\mathbf{W}_1(x)\exp\left(-\frac{2\pi i}{p}x\right)\right]\left[\exp\left(x\mathbf{R} + \frac{2\pi i}{p}x\mathbf{I}\right)\right] = \mathbf{W}_1(x)\exp(x\mathbf{R})$, deoarece $\exp\left(\frac{2\pi i}{p}x\mathbf{I}\right) = \exp\left(\frac{2\pi i}{p}x\right)\mathbf{I}$. Evident, $\mathbf{W}_1(x)\exp\left(-\frac{2\pi i}{p}\right)$ este periodică cu perioada p, întrucît $\exp(2\pi i) = 1$.

Dacă $\mathbf{W}_2$ este matrice fundamentală oarecare a sistemului (10.25) pentru care $\mathbf{A}(x+p) = \mathbf{A}(x)$, vom avea $\mathbf{W} = \mathbf{W}_2\mathbf{T}$, unde $\mathbf{T} \in M_n$ este o matrice constantă nesingulară, deoarece din (10.26) rezultă

$$\mathbf{W}(x+p) = \mathbf{W}(x)\exp(p\mathbf{R});$$

se obține imediat egalitatea

$$\mathbf{W}_2(x+p)\mathbf{T} = \mathbf{W}_2(x)\ \mathbf{T}\exp(p\mathbf{R}),$$

adică

$$\mathbf{W}_2(x+p) = \mathbf{W}_2(x)\ (\mathbf{T}\exp(p\mathbf{R})\mathbf{T}^{-1}).$$

Această ultimă egalitate arată că orice matrice fundamentală $\mathbf{W}$ a sistemului (10.25) determină pe $\mathbf{R}$ dacă se face abstracția de o asemănare (prin matricea $\mathbf{T}$) și reciproc, dacă $\mathbf{T} \in M_n$, $\det\mathbf{T} \neq 0$ ($\mathbf{T}$ fiind constantă), atunci există o matrice fundamentală $\mathbf{W}_2$ a sistemului periodic (10.25), pentru care

$$\mathbf{W}_2(x+p) = \mathbf{W}_2(x)\ (\mathbf{T}\ \exp(p\mathbf{R})\mathbf{T}^{-1}).$$

Așadar, deși matricea $\mathbf{A}$ nu determină în mod unic matricea constantă $\mathbf{R}$, în schimb îi determină în mod unic valorile și vectorii proprii, deci și polinomul caracteristic sau minimal.

Valorile proprii ale matricei $\mathbf{R}$ se numesc *exponenți caracteristici* ai matricei $\mathbf{A}$ iar valorile proprii ale matricei $\exp(p\mathbf{R})$ (care sînt toate nenule) se numesc *multiplicatori* ai matricei $\mathbf{A}$.

Importanța teoremei 10.1 constă în aceea că dacă se definește o matrice fundamentală $\mathbf{W}$ a sistemului periodic (10.25) pe orice interval de lungime p din $\mathbb{R}$ (de exemplu pe $[0, p]$), atunci se poate defini $\mathbf{W}$ pe $\mathbb{R}$. Într-adevăr, deoarece matricea $\mathbf{W}_1$ din (10.26) este periodică cu perioada p, dacă este cunoscută pentru $x \in [0, p]$, va fi cunoscută pentru orice $x \in \mathbb{R}$ iar matricea $\mathbf{R}$ poate fi determinată și aceasta numai cu ajutorul lui $\mathbf{W}$, deoarece $\mathbf{W}(0) = \mathbf{W}_1(0)$, $\mathbf{W}(p) = \mathbf{W}_1(p)\exp(p\mathbf{R})$, dar $\mathbf{W}_1(p) = \mathbf{W}_1(0) = \mathbf{W}(0)$, deci $\mathbf{R} = \frac{1}{p} \ln \left[\mathbf{W}(p)\,\mathbf{W}(0)\right]$.

De asemenea, aceeași teoremă arată care este structura soluțiilor oricărui sistem periodic (10.25); din (10.26) rezultă că soluțiile în cauză sînt de aceeași formă cu soluțiile unui sistem (10.25) în care matricea A este constantă, singura diferență constînd în aceea că în locul constantelor din soluția unui sistem cu coeficienți constanți apar funcții periodice de variabila reală x, avînd perioada p [aceste funcții periodice sînt contribuția lui $\mathbf{W}_1$ din (10.26) iar soluția sistemului cu coeficienți constanți sînt contribuția matricei $\exp(x\mathbf{R})$].

Exemplu

9. Sistemul

$$w_1' = w_1 \cos x - w_2 \sin x,\ w_2' = w_1 \sin x + w_2 \cos x$$

este un sistem periodic cu $p = 2\pi$, deoarece $\mathbf{A}(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & -\cos x \end{bmatrix}$ are proprietatea $\mathbf{A}(x+2\pi) = \mathbf{A}(x)$. Acest sistem se integrează ușor calculînd $w = w_1 + i\,w_2$; se obține ecuația $w' = w \exp(ix)$, deci $w(x) = C\exp[\exp(ix)]$. Rezultă

$$w_1 = \operatorname{Re}\ w = c_1 \exp(\sin x)\cos(\cos x) - c_2 \exp(\sin x)\sin(\cos x),$$
$$w_2 = c_1 \exp(\sin x)\sin(\cos x) + c_2 \exp(\sin x)\cos(\cos x),$$

iar această soluție este direct periodică cu perioada 2π.

Matricea $\mathbf{C}(=\exp(p\mathbf{R}))$ care apare în demonstrația teoremei 10.1 se numește de obicei *matricea de monodromie* corespunzătoare sistemului (10.25) și a matricei fundamentale $\mathbf{W}$ considerate.

Formula (10.26) arată că pentru ca toate soluțiile sistemului periodic (10.25) să tindă la zero cînd $x \to +\infty$ este necesar și suficient ca toate valorile proprii ale matricei $\mathbf{R}$ (adică exponenții caracteristici ai matricei $\mathbf{A}$) să aibă părțile reale negative (sau, ceea ce este totuna, ca valorile proprii ale matricei de monodromie să aibă valorile proprii subunitare în modul), rezultat care este analog unuia care este valabil pentru soluțiile sistemelor (10.25) cu matricea $\mathbf{A}$ constantă și anume:

Pentru ca toate soluțiile ecuației matriceale

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{AY},\ \mathbf{A} \in M_n,$$

să tindă la zero cînd $x \uparrow \infty$ este necesar și suficient ca toate valorile proprii ale matricei $\mathbf{A}$ să aibă partea reală negativă. Demonstrația acestor rezultate se poate face cu ajutorul unor inegalități de forma $\|\exp(\mathbf{B}x)\| \leqslant r\exp(-ax)$, în care $r > 0$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$ iar $\operatorname{Re}\lambda_j < -a$, λ_j fiind valorile proprii ale matricei constante $\mathbf{B}$ (inegalitate care va fi demonstrată în cap. 17).

De asemenea se pot obține și informații asupra cazului în care toate soluțiile sistemului (10.25), în care $\mathbf{A}$ poate să fie și matrice constantă, sînt mărginite pentru $x \uparrow \infty$; în acest caz este obligatoriu ca valorile proprii ale matricei de monodromie (sau ale matricei $\mathbf{A}$ dacă este constantă) să nu aibă parte reală pozitivă, întrucît atunci structura soluției arată că există soluții care nu sînt mărginite pentru $x \uparrow \infty$, deoarece $|p(x)\exp(\lambda x)|$ nu este mărginit cînd $x \uparrow \infty$ dacă $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Prin urmare, pentru ca toate soluțiile unui sistem diferențial de forma (10.25) (periodic sau cu coeficienți constanți) să fie mărginite pentru $x \uparrow \infty$ este necesar ca toate valorile proprii λ_j ale matricei de monodromie (respectiv ale matricei $\mathbf{A}$) să verifice inegalitățile $\operatorname{Re}\lambda_j \leqslant 0$; această condiție nu este suficientă decît dacă celulele (submatricele) Jordan corespunzătoare valorilor proprii λ_j pentru care $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$ sînt de ordinul întîi; în caz contrar apar soluții de forma $x^q \operatorname{cis}(\lambda_j x)$, $q \in \mathbb{N}$, care evident nu sînt mărginite pentru orice $x \in \mathbb{R}$, unde $\operatorname{cis}(x) = \exp(ix)$.

O altă consecință importantă pentru sistemele periodice (10.25) care decurge direct din reprezentarea (10.26) a soluțiilor acestor sisteme este aceea că orice sistem periodic este un *sistem reductibil*, adică există o transformare de forma $\mathbf{Y} = \mathbf{B}(z)\mathbf{Z}$, astfel încît matricea $\mathbf{Z}$ verifică o ecuație (matriceală) (10.25) cu coeficienți constanți. Într-adevăr, fără a face calculele, dacă se pune $\mathbf{B} = \mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_1$ fiind definit prin (10.26), rezultă că deoarece $\mathbf{Y} = \mathbf{W}_1(x) \cdot \exp(x\mathbf{R})$, $\mathbf{Z}$ va fi o matrice fundamentală a sistemului $\mathbf{Z}' = \mathbf{RZ}$ (în care $\mathbf{R}$ este o matrice constantă).

Pentru a justifica denumirea de multiplicatori dată valorilor proprii ale matricei de monodromie $\mathbf{C} = \exp(p\mathbf{R})$, se poate arăta că dacă $\mathbf{z}_\rho$ este un vector propriu al matricei $\mathbf{C}$, deci dacă $\mathbf{C}\mathbf{z}_\rho = \rho\,\mathbf{z}_\rho$, ρ fiind un multiplicator, atunci soluția $\mathbf{w}$ a sistemului (10.25), care verifică problema Cauchy $\mathbf{w}(0) = \mathbf{z}_\rho$, va verifica și egalitatea $\mathbf{w}(x+p) = \rho\,\mathbf{w}(x)$. Într-adevăr, deoarece $\mathbf{w}(x) = \mathbf{W}(x)\mathbf{z}_\rho$, în baza lui (10.26) avem

$$\mathbf{w}(x+p)=\mathbf{W}(x+p)\mathbf{z}_\rho=\mathbf{W}_1(x)\exp(x\mathbf{R}+p\mathbf{R})\mathbf{z}_\rho =$$
$$= [\mathbf{W}_1(x)\exp(x\mathbf{R})][\exp(p\mathbf{R})\mathbf{z}_\rho] = \mathbf{W}(x)\,(\rho\mathbf{z}_\rho) = \rho\mathbf{W}(x)\mathbf{z}_\rho = \rho\mathbf{w}(x).$$

10.7. Ecuații diferențiale liniare de ordinul al doilea

În diverse aplicații practice sînt adesea întîlnite ecuațiile diferențiale liniare de ordinul al doilea și de aceea vom prezenta pe scurt cîteva aspecte generale legate de teoria acestor ecuații. Aceste ecuații se pot prezenta sub trei forme importante :

$$y'' + ay' + by = f_1, \qquad a, b, f_1 : J \to \mathbb{C}, \qquad a, b, f_1 \in C^0(J), \tag{10.27}$$

$$(py')+qy=f_2, \quad p,q,f_2 : J\to \mathbb{C}, p,p',q, f_2 \in C^0(J),\ p(x)\neq 0,\ x\in J \tag{10.28}$$

$$y'' + cy = f_3, \qquad c, f_3 : J \to \mathbb{C},\ c, f_3 \in C^0(J), \tag{10.29}$$

numite *forma normală*, *autoadjunctă*, respectiv *redusă* a ecuațiilor diferențiale liniare de ordinul al doilea (forma redusă este de fapt un caz particular al formei autoadjuncte cu $p = 1$).

În anumite condiții impuse coeficienților acestor ecuații, cele trei forme sînt echivalente. Astfel, din (10.28) rezultă (10.27) cu

$$a = \frac{p'}{p}, \quad b = \frac{q}{p}, \quad f_1 = \frac{f_2}{p}$$

iar din (10.27) rezultă (10.28), înmulțind (10.27) cu $\exp\left(\int_{x_0}^{x} a\ \mathrm{d}t\right) =$ $= p(x)$ (evident $p \neq 0$ iar $p' = ap$) și notînd $q = b\exp\left(\int_{x_0}^{x} a\ \mathrm{d}t\right), f_2 =$ $= f_1 \cdot \exp\left(\int_{x_0}^{x} a\mathrm{d}t\right)$. Forma redusă (10.29) se poate obține atît din

(10.28), dacă $p : J \to \mathbb{R}$ și $p(x) > 0$, $x \in J$, prin schimbarea variabilei independente x în variabila t, punînd

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{p}\,\mathrm{d}t, \quad x_0 \in J,$$

deoarece

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

și deci

$$(py') = \frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p\cdot\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$$

și notînd $pq = c$, $pf_2 = f_3$, cu $\varphi(t)$ în loc de x, unde φ este funcția, inversă lui $t = \Phi(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{p}\,\mathrm{d}t$, care există deoarece $\Phi' = \frac{1}{p} > 0$, deci Φ este strict monotonă, cît și din (10.27) dacă $a \in C^1(J)$, prin schimbarea de funcție necunoscută

$$y \to z,\ y = z\,\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} a\ \mathrm{d}t\right), \quad x_0 \in J,$$

în care caz $c = b - \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}a'$, $f_3 = f_1\exp\left(\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} a\ \mathrm{d}t\right)$.

Este posibil însă uneori ca în forma autoadjunctă (10.28) să nu avem $p \in C^1(J)$ (deși $py' \in C^1$) și atunci această ecuație trebuie interpretată ca fiind obținută din sistemul diferențial liniar

$$w_1' = \frac{1}{p}w_2,\ w_2' = -\,q\,w_1 + f_2 \ (\text{sau } \mathbf{w}' = \mathbf{A}\,\mathbf{w}+\mathbf{g}), \tag{10.28'}$$

în care

$$\mathbf{w}=[w_1, w_2]^t, \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{p} \\ -q & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{g} = [0, f_2]^t.$$

Sistemului diferențial (10.28′) i se pot aplica teoremele generale de existență și unicitate, deoarece $\mathbf{A} \in C^0(J)$, $\mathbf{g} \in C^0(J)$.

Dacă y_1 și y_2 sînt două soluții particulare în J ale ecuației omogene corespunzătoare ecuației (10.27), adică

$$y_j'' + ay_j' + by_j = 0, \quad j = 1, 2,$$

astfel încît

$$\omega(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1' \neq 0,$$

atunci orice soluție în J a ecuației (10.27) se poate scrie sub forma

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{\omega_1(x, t)}{\omega(t)} f_1(t)\,dt, \; x_0 \in I, \qquad (10.30)$$

în care $\omega_1(x, t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}$. (Se observă că ω_1 se obține din wronskianul soluțiilor $y_1(t)$, $y_2(t)$ prin înlocuirea ultimei linii prin $y_1(x)$, $y_2(x)$).

Din teoria generală a ecuațiilor diferențiale (cap. 9) rezultă că dacă unei ecuații liniare i se poate determina o soluție particulară a ecuației omogene, atunci ecuației în cauză i se poate coborî ordinul; deci în cazul ecuațiilor liniare de ordinul al doilea cunoașterea unei soluții particulare a ecuației omogene este practic echivalentă cu posibilitatea obținerii oricărei soluții prin operații de integrare. Într-adevăr, dacă $y_1 \in C^2(J)$ verifică ecuația $y_1'' + ay_1' + by_1 = 0$, prin substituția $y = y_1z$ se obține din (10.27) ecuația $z'' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + a\right)z' = \frac{f}{y_1}$ care se reduce imediat la o ecuație diferențială liniară de ordinul întîi; notînd $a_1 = \exp\left(\int a\,dx\right)$, se verifică ușor că, pe intervalele din J pentru care $y_1 \neq 0$, orice soluție a ecuației (10.27) va avea forma

$$y = c_1y_1 + c_2y_1 \int (a_1y_1^2)^{-1}\,dx + y_1 \int (a_1y_1^2)^{-1}\,dx \int a_1y_1f\,dx, \qquad (10.31)$$

unde $\int = \int_{x_0}^{x}$, $x, x_0 \in J$, $y_1(x_0) \neq 0$.

O altă particularitate a ecuațiilor liniare și omogene de ordinul al doilea este faptul că acestea sînt echivalente cu ecuațiile de tip Riccati; într-adevăr, dacă în ecuația $y'' + ay' + by = 0$ se pune $y' = uy$, se obține ecuația Riccati $u' + u^2 + au + b = 0$ și reciproc dacă în ultima ecuație se înlocuiește u prin $\frac{y'}{y}$, se obține ecuația (10.27) omogenă.

Exemplu

10. Pentru ecuația

$$y'' - y' \sin x - y \cos x = \cos x,$$

se poate obține orice soluție în $\mathbb{R}$, observînd că ecuația omogenă $y'' - y' \sin x + y \cos x = 0$ admite soluția particulară $y_1(x) = e^{-\cos x} = \exp(-\cos x)$; conform cu (10.31), deoarece $a_1 = \exp\left(-\int \sin x\,dx\right) = \exp(\cos x)$, se obține $y = c_1 \exp(-\cos x) + c_2 \int_{x_0}^{x} \exp(2\cos t - \cos x)\,dt + \int_{x_0}^{x} \exp(2\cos t - \cos x)\,dt \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau$.

Dacă ecuația (10.8) omogenă (deci cu $f = 0$) are coeficienții reali, în unele situații este comodă transformarea acesteia într-un sistem diferențial liniar de ordinul întîi cu ajutorul *transformării Prüfer* în modul următor.

Fie y o soluție nebanală a ecuației

$$(py')' + qy = 0, \quad p, p', q \in C(J), \quad p > 0. \qquad (10.32)$$

și fie

$$r = (y^2 + p^2y'^2)^{1/2} > 0, \; \theta = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{py'}\right) = \operatorname{arcctg}\left(\frac{py'}{y}\right) \qquad (10.33)$$

nu putem avea simultan, într-un punct x_0 din intervalul de continuitate a coeficienților p și q, $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$, altfel s-ar obține, conform cu teorema de existență și unicitate, soluția banală așa că

raportul $\frac{y'}{y}\left(\text{sau } \frac{y}{y'}\right)$ are sens în J]. Presupunînd (r, θ) coordonate polare în planul (x, y) (vom avea permanent $r>0$, aşa că θ va fi determinat), deci $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ şi utilizînd ecuaţia (10.32) verificată de y, rezultă că r şi θ vor verifica (r şi θ funcţii de x) sistemul lui Prüfer

$$\begin{aligned} r' &= \left[\frac{1}{p(x)} - q(x)\right] r\sin\theta\cos\theta, \\ \theta' &= \frac{1}{p(x)}\cos^2\theta + q(x)\sin^2\theta. \end{aligned} \tag{10.34}$$

În acest sistem necunoscute sînt funcţiile r şi θ şi deci este un sistem neliniar; cea de-a doua ecuaţie prezintă particularitatea că nu conţine decît o singură necunoscută şi deci dacă se va obţine $\theta = \theta(x)$, din prima ecuaţie se obţine direct, printr-o cvadratură, cealaltă variabilă r a sistemului.

Exemplu

11. Pentru ecuaţia

$$x^2y'' + xy' + y = 0$$

forma autoadjunctă este

$$(xy')' + \frac{1}{x}y = 0,$$

deci $p(x) = x$, $q(x) = \frac{1}{x}$ (presupunînd $x \neq 0$), ceea ce conduce la sistemul Prüfer

$r' = 0$, $\theta' = \frac{1}{x}$; rezultă $r = r_0$, $\theta = \ln(|x|c)$ şi deci soluţia va fi

$$y_0 = r_0\sin\theta = r_0\sin(\ln|x|c) = r_0\sin(\ln|x| + c_1) = (r_0\cos c_1)\sin(\ln|x|) + (r_0\sin c_1)\cos(\ln|x|) = A\sin(\ln|x|) + B\cos(\ln|x|).$$

Rezultă, aşadar, că dacă se determină soluţiile $r = r(x; r_0, \theta_0)$, $\theta = \theta(x; r_0, \theta)$ ale sistemului (10.34), soluţiile ecuaţiei iniţiale (10.32) se obţin scriind

$$y = r(x; r_0, \theta_0)\sin\theta(x; x_0, \theta).$$

CAPITOLUL 11

Ecuaţii diferenţiale liniare în complex

11.1. Puncte regulate şi puncte singulare izolate ale soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale liniare

Vom considera domenii $G \subset \mathbb{C}$ iar toate funcţiile definite în G vor fi presupuse olomorfe în G cu excepţia unui număr finit de singularităţi izolate (aceste singularităţi vor fi deci fie poli fie puncte singulare esenţiale). Vom lua în consideraţie doar ecuaţiile diferenţiale liniare şi omogene de ordinul al doilea, deci de forma

$$w'' + a(z)w' + b(z)w = 0, \quad a, b : G \to \mathbb{C}. \tag{11.1}$$

În baza rezultatelor din capitolele anterioare (vezi cap. 4) se ştie că dacă $z_0 \in G$ este un punct de olomorfie pentru coeficienţii a şi b, atunci va exista o soluţie $w = w(z)$ de asemenea olomorfă pentru $|z - z_0| < r$, $r > 0$, care este unic determinată dacă se cunosc şi condiţiile iniţiale

$$w(z_0) = \alpha, \quad w'(z_0) = \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \tag{11.2}$$

Aşadar, această soluţie se va scrie sub forma

$$w(z) = \alpha + \beta(z - z_0) + w_2(z - z_0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{n} w_n(z - z_0)^n,$$

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \beta, \tag{11.3}$$

seria fiind absolut şi uniform convergentă pentru $|z - z_0| < r$, $r > 0$ şi poate fi prelungită în întreg domeniul de olomorfie al coeficienţilor a şi b ai ecuaţiei (11.1); de aici rezultă că numărul real r poate fi considerat egal cu distanţa de la z_0 la punctul singular cel mai apropiat de z_0 al coeficienţilor a şi b. Prin urmare, dacă coeficienţii a şi b sînt funcţii întregi (adică sînt funcţii olomorfe în întreg planul complex $\mathbb{C}$), atunci şi soluţia (11.3) va fi o funcţie întreagă.

În baza teoremei de monodromie (care afirmă că dacă G este un domeniu simplu conex, atunci plecînd de la un element taylorian oarecare, prin prelungire analitică, se poate deduce o funcţie olomorfă uniformă în G), rezultă că dacă domeniul de olomorfie al coeficienţilor a şi b este simplu conex, atunci în G orice soluţie a ecuaţiei (11.1) va fi uniformă.

Acest rezultat încetează să mai fie valabil dacă în G coeficienţii au singularităţi, după cum ne putem convinge imediat dacă se ia în consideraţie ecuaţia diferenţială

$$w'' + \frac{2}{z - z_0} w' + \frac{1}{4(z - z_0)^2} w = 0$$

ai cărei coeficienţi $a(z) = \dfrac{2}{z - z_0}$, $b(z) = \dfrac{1}{4(z - z_0)^2}$ sînt funcţii olomorfe în $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ (deci coeficienţii sînt şi funcţii uniforme), dar soluţiile acestei ecuaţii sînt de forma

$$w_1(z) = (z - z)^{-1/2}, \; w_2(z) = (z - z_0)^{-1/2} \ln(z - z_0)$$

şi evident nu sînt funcţii uniforme în $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

Consideraţiile anterioare epuizează rezultatele care pot fi obţinute pentru soluţiile ecuaţiilor diferenţiale liniare (nu neapărat de ordinul al doilea) cu coeficienţi olomorfi.

Problemele practice însă arată că nu ne sînt suficiente aceste rezultate, deoarece ecuaţiile care apar în tratarea unora din aceste

probleme sînt cu coeficienţi singulari şi de aceea sînt necesare unele informaţii în legătură cu soluţiile acestor ecuaţii. Este evident că dacă $z_0 \in G$ este un punct singular pentru coeficienţii ecuaţiei (11.1) (z_0 poate fi punct singular fie numai pentru a, fie numai pentru b sau pentru ambii coeficient a şi b), atunci problema Cauchy (11.2) pentru ecuaţia (11.1) nu poate avea o soluţie olomorfă în z_0 dacă α şi β sînt numere complexe oarecari. Într-adevăr, dacă ar exista două soluţii w_1 şi w_2 olomorfe în vecinătatea lui $z = z_0$ ale ecuaţiei (11.1), dacă w_1 şi w_2 sînt liniar independente, wronskianul lor $w_1 w_2' - w_2 w_1'$ va fi olomorf şi nenul în vecinătatea amintită şi atunci, considerînd sistemul

$$w_1'' + a w_2' + b w_1 = 0, \quad w_2'' + a w_2' + b w_2 = 0$$

ca un sistem algebric în coeficienţii a şi b, rezultă a şi b funcţii olomorfe în z_0, deoarece determinantul coeficienţilor este chiar wronskianul celor două soluţii. Aşadar, dacă $z = z_0$ este un punct singular pentru ecuaţia (11.1) (deci dacă punctul z_0 este singular pentru cel puţin un coeficient al acestei ecuaţii), atunci cel mult o soluţie a ecuaţiei în cauză va putea fi olomorfă în z_0. În baza unui rezultat anterior (vezi cap. 4), dacă se consideră ecuaţia

$$(z - z_0) w'' + P(z) w' + Q(z) w = 0, \tag{11.4}$$

unde P şi Q sînt funcţii olomorfe în vecinătatea lui z_0, atunci există o soluţie olomorfă, în vecinătatea punctului z_0, a acestei ecuaţii.

Vom conveni să denumim punctele singulare ale ecuaţiei (11.1) *puncte singulare slabe* dacă există cel puţin o soluţie a acestei ecuaţii care este olomorfă în punctul singular considerat sau dacă prin anumite transformări elementare efectuate asupra soluţiilor ecuaţiei în studiu se poate obţine o soluţie olomorfă în punctul singular în cauză. În baza acestei definiţii rezultă că ecuaţiile diferenţiale, liniare şi omogene, de forma (11.4) au un punct singular slab în z_0, dacă P şi Q sînt olomorfe în z_0. Pe de altă parte, luînd în consideraţie ecuaţiile diferenţiale de ordinul al doilea de forma

$$(z - z_0)^2 w'' + (z - z_0) p(z) w' + q(z) w = 0, \tag{11.5}$$

în care p şi q sînt funcţii olomorfe în vecinătatea lui z_0, atunci prin transformarea $w(z) \to (z - z_0)^{\rho} w(z)$ se poate determina convenabil numărul complex ρ astfel încît ecuaţia (11.5) să fie de forma (11.4). Într-

adevăr, scriind în ecuația (11.5) $w(z) = (z - z_0)^\rho u(z)$, se va obține ecuația diferențială

$$(z - z_0)^2 u'' + (z - z_0)[2\rho + p(z)]u' + [\rho(\rho - 1) + p(z) + q(z)]u = 0,$$

din care, după simplificare, se obține ecuația

$$(z - z_0)u'' + [2\rho + p(z)]u' + q^*(z) = 0, \quad q^*(z) = p_1(z) + q_1(z), \quad (11.5')$$

unde funcțiile olomorfe p_1 și q_1 se definesc prin

$$p(z) = p_0 + (z - z_0)\, p_1(z), \quad q(z) = q_0 + (z - z_0)\, q_1(z),$$

dacă se determină ρ astfel încît

$$F(\rho) = \rho(\rho - 1) + p_0\rho + q_0 = 0, \; p_0 = \lim_{z \to z_0} p(z), \; q_0 = \lim_{z \to z_0} q(z). \quad (11.6)$$

Evident, ecuația (11.5′) este de forma ecuației (11.4), cu $P(z) = 2\rho + p(z)$, $Q(z) = q^*(z) = p_1(z) + q_1(z)$, și deci va admite sigur o soluție u olomorfă în vecinătatea lui $z = z_0$. Deoarece ecuația de gradul al doilea (11.6), numită de obicei *ecuația determinantă* (sau *ecuația indicială*) pentru punctul singular $z = z_0$ al ecuației (11.5), admite în general două soluții, ne putem aștepta ca ecuația (11.5) să admită două soluții de forma $(z - z_0)^\rho u(z)$ și anume

$$w_1(z) = (z - z_0)^{\rho_1} f_1(z), \quad w_2(z) = (z - z_0)^{\rho_2} f_2(z), \quad (11.7)$$

în care ρ_1 și ρ_2 verifică ecuația determinantă (11.6) iar f_1 și f_2 sînt funcții olomorfe în vecinătatea punctului singular z_0, deci care se pot scrie sub forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$ iar coeficientul a_0 se poate lua egal cu unitatea. Evident $a_0 \neq 0$, deoarece dacă $a_0 = a_1 = \dots = a_{k+1} = 0$, $a_k \neq 0$, ar rezulta

$$w(z) = (z - z_0)^\rho f(z) = (z - z_0)^\rho [a_k (z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \dots] =$$

$$= (z - z_0)^{\rho + k}[a_k + a_{k+1}(z - z_0) + \dots] = (z - z_0)^{\rho^*} f^*(z),$$

$$\rho^* = \rho + k, \; f^*(z_0) = a_k \neq 0$$

și deci dacă $f(z_0) = a_0 \neq 1$, funcția $\frac{w(z)}{a_0}$ este de asemenea soluție a ecuației (11.5), dar $f(z_0) = 1$.

Pentru a determina soluțiile ecuației (11.5) valabile în vecinătatea punctului singular z_0 este suficient să se determine exponentul ρ și coeficienții dezvoltării funcției f în serie Taylor în vecinătatea lui z_0; or ρ se determină cu ajutorul ecuației (11.6): $F(\rho) = 0$, iar coeficienții a_n, $n \in \mathbb{N}$, se pot obține înlocuind w dat prin $w(z) = (z - z_0)^\rho f(z) = (z - z_0)^\rho \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+\rho}$, $a_0 = 1$, în ecuația (11.5) și impunînd condiția ca ecuația să fie verificată. Deoarece w este derivabilă termen cu termen (datorită olomorfiei lui f în vecinătatea lui z_0) și înmulțirile pot fi efectuate în mod normal, datorită convergenței absolute a seriilor, prin înlocuire în ecuația (11.5) se obține egalitatea

$$(z - z_0)^\rho \left[\rho(\rho - 1) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\rho + n)(\rho + n - 1)(z - z_0)^n\right] +$$

$$+ (z - z_0)^\rho p(z) \left[\rho + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\rho + n)(z - z_0)^n\right] +$$

$$+ (z - z_0)^\rho q(z) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n\right] = 0.$$

care după simplificare cu $(z - z_0)^\rho$ și înlocuirea lui p și q prin dezvoltările Taylor corespunzătoare, $p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (z - z_0)^n$, $q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (z - z_0)^n$, se transformă într-o serie de puteri, ai cărei coeficienți trebuie să fie nuli, pentru a se verifica ecuația (11.5). Termenul liber al acestei dezvoltări este evident nul, fiind egal cu $F(\rho)$ definit prin (11.6), unde ρ este soluție a ecuației $F(\rho) = 0$. Din expresia coeficientului lui $(z - z_0)^n$ rezultă egalitățile

$$a_n F(\rho + n) + \sum_{k=1}^{n+1} a_{n-k}[(\rho + n - k)\, p_k + q_k] + \rho p_n + q_n = 0, \; n \in \mathbb{N},$$

care arată că se pot determina toți coeficienții a_n, $n \in \mathbb{N}$, din aproape în aproape, dacă $F(\rho + n) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Or, cum $F(\rho)$ este un trinom

de gradul doi, vom avea $F(\rho + n) = 0$ numai dacă cele două rădăcini ρ_1 și ρ_2 ale ecuației determinante sînt astfel încît $\rho_1 + n = \rho_2$ sau $\rho_1 - \rho_2 = n$; prin urmare, dacă diferența rădăcinilor ecuației determinante $F(\rho) = 0$ nu este un număr întreg, atunci se pot determina întotdeauna două soluții liniare independente w_1 și w_2 ale ecuației (11.5), valabile în vecinătatea punctului z_0, punctul singular al ecuației (11.5), și avînd forma (11.7).

Dacă rădăcinile ecuației determinante (11.6) sînt astfel încît $\rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{Z}$, atunci procedeul descris anterior permite determinarea unei singure soluții de forma $(z - z_0)^{\rho_1} f(z)$, $\rho_1 \in \mathbb{C}$, f fiind olomorfă în vecinătatea lui z_0. Notînd cu w_1 această soluție, se știe că cealaltă soluție se poate obține cu ajutorul substituției $w = w_1 \cdot u$; se obține o egalitate de forma $\frac{u''}{u'} = -2\frac{w_1'}{w_1} - \frac{p(z)}{z - z_0}$, adică, punînd $p(z) = p_0 + (z - z_0)p_1(z)$, se obține $u'(z) = C_2 \frac{(z - z_0)^{-p_0}}{w_1^2(z)} g_1(z) = C_2 (z - z_0)^{-(2\rho_1 + p_0)} g(z)$, cu $g(z) = \frac{g_1(z)}{f^2(z)}$ o funcție olomorfă în vecinătatea lui $z = z_0$ iar $g(z_0) \neq 0$. Deoarece $\rho_1 + \rho_2 = 1 - p_0$ iar $\rho_2 = \rho_1 + s$, $s \in \mathbb{Z}$, se obține $2\rho_1 + p_0 \in \mathbb{Z}$ și fără a micșora generalitatea se poate presupune $2\rho_1 + p_0 \in \mathbb{Z}_+$ (în caz contrar se ia valoarea ρ_2 în locul lui ρ_1); rezultă din dezvoltarea în serie a lui g că funcția $u(z) = C_1 + C_2 \int (z - z_0)^{-(2\rho_1 + p_0)} g(z)\, dz$ va conține în general un termen logaritmic [dar uneori este posibil ca acest termen să dispară dacă reziduul funcției $(z - z_0)^{-(2\rho + p_0)} g(z)$ este nul]. Grupînd calculele efectuate pînă acum, rezultă soluția ecuației (11.5), valabilă în vecinătatea punctului singular z_0 al ecesteia:

$$w(z) = C_1 w_1(z) + C_2 \left[w_1(z) \ln (z - z_0) + (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \right] \tag{11.8}$$

și care este formată din cele două soluții particulare w_1 și w_2 liniar independente ale ecuației în studiu, unde

$$w_2(z) = w_1(z) \ln (z - z_0) + (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \text{ dacă } \rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{Z}.$$

Nu este obligatorie apariția termenului $w_1(z) \ln (z - z_0)$, după cum ne arată exemplul ecuației Euler $(z - z_0)^2 w'' - 2(z - z_0) w' + 2w = 0$

pentru care ecuația determinantă $\rho(\rho - 1) - 2\rho + 2 = 0$ are rădăcinile $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 2$, deci $\rho_1 - \rho_2 = -1$, iar soluțiile sînt $w_1(z) = (z - z_0)$, $w_2(z) = (z - z_0)^2$. Vom putea presupune deci demonstrat rezultatul următor:

Teorema 11.1. *Dacă în ecuația diferențială, liniară și omogenă*

$$(z - z_0)^2 w'' + (z - z_0) p(z) w' + q(z) w = 0$$

funcțiile p și q sînt olomorfe în vecinătatea lui z_0, atunci această ecuație admite în vecinătatea punctului singular z_0 două soluții w_1 și w_2 liniar independente de forma

$$w_j(z) = (z - z_0)^{\rho_j} f_j(z), \quad j = 1, 2,$$

dacă $\rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{Z}$ *sau de forma*

$$w_1(z) = (z - z_0)^{\rho_1} f_1(z), \; w_2(z) = w_1(z) \ln (z - z_0) + (z - z_0)^{\rho_2} f_3(z),$$

dacă $\rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{Z}$, *în care ρ_1 și ρ_2 sînt rădăcinile ecuației determinante*

$$\rho(\rho - 1) + p_0 \rho + q_0 = 0, \quad p_0 = p(z_0), \; q_0 = q(z_0)$$

iar f_1, f_2 și f_3 sînt funcții olomorfe în vecinătatea lui z_0.

Exemple

1. În cazul ecuației

$$4(z - z_0)^2 w'' + [1 - 4a^2 - (z - z_0)^2] w = 0$$

avem $p(z) = 0$, $q(z) = \frac{1 - 4a^2}{4} - \frac{(z - z_0)^2}{4}$, deci $p_0 = 0$, $q_0 = \frac{1}{4} - a^2$; ecuația determinantă fiind $\rho(\rho - 1) + \frac{1}{4} - a^2 = 0$, se obține $\rho_1 = \frac{1}{2} + a$, $\rho_2 = \frac{1}{2} - a$ și vom avea $\rho_1 - \rho_2 = 2a$.

Așadar, dacă $2a \notin \mathbb{Z}$, în vecinătatea lui z_0 ecuația admite două soluții w_1 și w_2:

$$w_1(z) = (z - z_0)^{\rho_1} f_1(z) = (z - z_0)^{\frac{1}{2} + a} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^{\frac{1}{2} + a} \left[1 + \frac{(z - z_0)^2}{16(a + 1)} + \ldots \right],$$

$$w_2(z) = (z - z_0)^{\rho_2} f_2(z) = (z - z_0)^{\frac{1}{2} - a} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^{\frac{1}{2} - a} \left[1 + \frac{(z - z_0)^2}{16(1 - a)} + \ldots \right],$$

coeficienții $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$, fiind determinați prin metoda indicată anterior.

Din analiza expresiilor pentru w_1 și w_2 rezultă că nu este obligatorie condiția $2a \notin \mathbb{Z}$ ci doar $a \neq 0$ pentru ca aceste două soluții să fie liniar independente. Dacă $a = 0$, ecuația va admite o soluție particulară de forma

$$w_1(z) = (z - z_0)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{(z-z_0)^2}{16} + \ldots \right],$$

iar a doua soluție liniar independentă de w_1 se poate obține prin schimbarea $w \to w_1 \cdot w$.

Deoarece în afara lui z_0 ecuația nu are alte singularități, raza de convergență a seriilor de puteri care apar în componența soluțiilor anterioare va fi $R = \infty$.

2. Ecuația $(z-\mathrm{i})w'' + w' + w = 0$ are o singularitate slabă în punctul $z = \mathrm{i}$; aici $p(z) = 1$, $q(z) = (z-\mathrm{i})$, deci $p(\mathrm{i}) = 1$, $q(\mathrm{i}) = 0$, iar ecuația determinantă va fi $\rho(\rho-1) + \rho = 0$ cu rădăcinile $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 0$. Rezultă o soluție de forma

$$w_1(z) = (z-\mathrm{i})^{\rho_1} f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-\mathrm{i})^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-\mathrm{i})^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} \quad \text{cu} \quad \alpha_0 = 1,$$

iar cealaltă soluție, care se determină prin transformarea $w \to w_1 \cdot w$, va fi

$$w_2(z) = w_1(z) \ln (z-\mathrm{i}) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-\mathrm{i})^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \right).$$

Deoarece ecuația dată nu are alte puncte singulare în $\mathbb{C}$ în afara lui $z = \mathrm{i}$, rezultă că cele două serii de puteri care apar în expresiile lui w_1 și w_2 au raza de convergență $R = \infty$, fapt care poate verifica și direct prin calcul, utilizînd formula de calcul

$$R = \frac{1}{l} \text{ cu } l = \lim \sqrt[n]{|\alpha_n|}, \quad \alpha_n = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}$$

sau

$$\alpha_n = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \right).$$

11.2. Ecuații diferențiale de tip Fuchs

Vom considera din nou ecuația diferențială liniară de ordinul al doilea

$$(z - z_0)^2 w'' + (z - z_0)\, p(z) w' + q(z)\, w = 0,$$

a cărei formă normală va fi

$$w'' + \frac{p(z)}{z - z_0} w' + \frac{q(z)}{(z - z_0)^2} w = 0, \qquad (11.9)$$

deci, notînd $a(z) = \dfrac{p(z)}{z - z_0}$, $b(z) = \dfrac{q(z)}{(z - z_0)^2}$, se obține ecuația

$$w'' + a(z)\, w' + b(z)\, w = 0, \qquad (11.9')$$

în care coeficienții a și b au un pol simplu, respectiv dublu pentru $z = z_0$ (deoarece p și q sînt funcții olomorfe în vecinătatea lui z_0).

Vom conveni să spunem că punctul singular $z = z_0$ al coeficienților a și b ai ecuației (11.9) este *un punct singular regulat* al ecuației (11.9′) dacă z_0 este cel mult un pol simplu pentru coeficientul a și este cel mult un pol dublu pentru coeficientul b. În caz contrar, punctul singular $z = z_0$ se numește *punct singular neregulat* al ecuației (11.9′); cu alte cuvinte, pentru ca z_0 să fie un punct singular neregulat pentru ecuația (11.9′), acest punct este sau punct singular esențial cel puțin pentru unul din coeficienții a sau b sau este pol de ordin superior lui unu (respectiv superior lui doi) pentru coeficientul a (respectiv coeficientul b). În baza teoremei 11.1, deoarece orice punct singular regulat al ecuației (11.9′) reprezintă o singularitate slabă a acestei ecuații, soluțiile ecuației (11.9) se vor scrie sub o formă specială (în vecinătatea lui z_0), după cum se indică relațiile (11.7) și (11.8). Este valabilă și reciproca teoremei 11.1 în sensul următor:

Dacă în vecinătatea unui punct singular izolat al ecuației (11.9′) soluțiile se scriu sub forma (11.7) sau (11.8), coeficienții a și b fiind funcții uniforme în vecinătatea lui z_0, atunci acest punct singular este regulat, adică a și b admit singularități în z_0, aceste singularități fiind de tip pol: poli simpli (pentru a) și dubli (pentru b), cel mult. Demonstrația acestei reciproce este simplă: din formula Abel-Liouville $W(z) = W_0 \exp\left(\int a\, \mathrm{d}x \right)$ rezultă $a = \dfrac{W'}{W}$, W fiind wronskianul soluțiilor w_1, și w_2, sau, deoarece $W = w_1 w_2' - w_2 w_1' = w_2^2 \left(\dfrac{w_1}{w_2} \right)'$, rezultă $a = -\dfrac{2w_2'}{w_2} - \left[\ln \left(\dfrac{w_1}{w_2} \right)' \right]'$ și scriind fie

$$w_1(z) = (z - z_0)^{\rho_1} f_1(z), \quad w_2(z) = (z - z_0)^{\rho_2} f_2(z)$$

fie

$$w_1(z) = w_2(z) \ln (z - z_0) + (z - z_0)^{\rho_1} f_3(z), \; w_2(z) = (z - z_0)^{\rho_2} f_2(z),$$

un calcul simplu conduce la egalitatea $a(z) = \dfrac{1 - \rho_1 - \rho_2}{z - z_0} + a_0 +$

$+ a_1(z - z_0) + \ldots$ (deci z_0 este cel mult pol simplu pentru coeficientul a); apoi deoarece $w'' + a(z)w' + b(z)w = 0$, rezultă $b = -a\frac{w'}{w} - \frac{w''}{w}$ și înlocuind a cu expresia găsită și w prin $(z-z_0)^{\circ}f(z)$, este ușor de verificat că b va admite ca singularitate cel mult un pol dublu.

Dacă se ia în considerație punctul de la infinit, deci dacă $z_0 = \infty$, atunci se efctuează transformarea $\zeta = \frac{1}{z}$ care lui $z = \infty$ din planul complex z face să-i corespundă punctul $\zeta = 0$ din planul complex ζ. Deoarece

$$w' = \frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dz} = -\zeta^2\frac{dw}{d\zeta},\ w'' = \frac{dw'}{dz} = \frac{dw'}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dz} = \zeta^2\frac{d}{d\zeta}\left(\zeta^2\frac{dw}{d\zeta}\right) =$$

$$= \zeta^4\frac{d^2w}{d\zeta^2} - 2\zeta^3\frac{dw}{d\zeta}$$

prin înlocuire în ecuația (11.9′) se va obține ecuația [cu $u(\zeta) = w\left(\frac{1}{\zeta}\right)$]:

$$\frac{d^2u}{d\zeta^2} + \left[\frac{2}{\zeta} - \frac{1}{\zeta^2}a\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]\frac{du}{d\zeta} + \frac{1}{\zeta^4}b\left(\frac{1}{\zeta}\right)u = 0. \qquad (11.10)$$

Va rezulta deci că ecuația (11.9) va avea punctul $z = \infty$ un punct nesingular (regulat), dacă ecuația (11.10) va avea coeficienții funcții olomorfe pentru $\zeta = 0$; dacă $\zeta = 0$ este pentru ecuația (11.10) un punct singular regulat, atunci $z = \infty$ va fi un punct singular regulat pentru ecuația (11.9′) și dacă $\zeta = 0$ este un punct singular neregulat pentru ecuația (11.10), atunci $z = \infty$ va fi un punct singular neregulat pentru ecuația (11.9′).

Teorema 11.2. *Dacă în ecuația* (11.9) *coeficienții a și b sînt funcții olomorfe în vecinătatea lui* $z = \infty$ (*adică sînt olomorfe pentru* $|z| > R$), *fiind valabile dezvoltările*

$$a(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots,\ b(z) = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \ldots, |z| > R, \qquad (11.11)$$

atunci punctul $z = \infty$ *este un punct regulat pentru ecuația* (11.9′), *dacă* $a_0 = 0$ *și* $a_1 = 2$ *iar* $b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$ *și este un punct singular regulat dacă* $a_0 = 0$ *și* $b_0 = b_1 = 0$; *în toate celelelalte cazuri, punctul* $z = \infty$ *este un punct singular neregulat pentru ecuația considerată.*

⌜ Demonstrația rezultă direct din forma (11.10) a ecuației (11.9); deoarece

$$a\left(\frac{1}{\zeta}\right) = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \ldots,\ b\left(\frac{1}{\zeta}\right) = b_0 + b_1\zeta + b_2\zeta^2 + b_3\zeta^3 + b_4\zeta^4 + \ldots$$

pentru ca funcția $\frac{2}{\zeta} - \frac{1}{\zeta^2}a\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ să fie olomorfă în origine, este necesar și suficient să avem $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, iar pentru ca funcția $\frac{1}{\zeta^4}b\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ să fie olomorfă pentru $\zeta = 0$, trebuie ca $b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$. De asemenea, pentru ca funcția $\frac{2}{\zeta} - \frac{1}{\zeta^2}a\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ să aibă cel mult un pol simplu pentru $\zeta = 0$, este necesar și suficient ca $a_0 = 0$, iar funcția $\frac{1}{\zeta^4}b\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ va avea cel mult un pol dublu în origine dacă și numai dacă $b_0 = b_1 = 0$. ⌟

Cu ajutorul teoremei 11.2 se pot scrie direct condițiile pentru ca $z = \infty$ să fie punct singular regulat al ecuației (11.9′); acestea sînt:

$$\lim_{z\to\infty} a(z) = 0,\ \lim_{z\to\infty} b(z) = \lim_{z\to\infty} zb(z) = 0 \qquad (11.12)$$

după cum rezultă imediat din (11.11), dacă $a_0 = 0$ și $b_0 = b_1 = 0$. Evident, condițiile

$$\lim_{z\to\infty} a(z) = 0,\ \lim_{z\to\infty} z\cdot a(z) = 2,\ \lim_{z\to\infty} b(z) = \lim_{z\to\infty} zb(z) = \lim_{z\to\infty} z^2b(z) = \lim_{z\to\infty} z^3b(z) = 0 \qquad (11.13)$$

vor fi condițiile necesare și suficiente pentru ca punctul $z = \infty$ să fie un punct regulat pentru ecuația (11.9′).

Vom spune că ecuația diferențială (11.9′) este de *tip Fuchs* dacă toate punctele sale singulare (inclusiv $z = \infty$, dacă este cazul) sînt puncte singulare regulate.

Exemple

3. Pentru ecuația $(z - \mathrm{i})z^2 w'' + (z - \mathrm{i})w' + 2zw = 0$, în care $a(z) = \dfrac{1}{z^2}$, $b(z) = \dfrac{2}{z(z - \mathrm{i})}$, punctul singular $z = 0$ este neregulat (fiind pol dublu pentru a) iar punctul singular $z = \mathrm{i}$ este punct singular regulat (fiind pol simplu pentru coeficientul b). Mulțimea $\{0, \mathrm{i}\}$ definește punctele singulare la distanță finită ale ecuației date și mai trebuie analizat și punctul $z = \infty$; deoarece

$$\lim_{z\to\infty} a(z) = 0, \quad \lim_{z\to\infty} za(z) = 0, \quad \lim_{z\to\infty} b(z) = 0, \quad \lim_{z\to\infty} z\,b(z) = 0,$$

rezultă că punctul de la infinit este un punct singular regulat.

În rezumat, ecuația în cauză are trei puncte singulare în $\overline{\mathbb{C}}$ și anume $z = 0$, $z = \mathrm{i}$ și $z = \infty$, punctele singulare i și ∞ fiind regulate iar punctele $z = 0$ este punct singular neregulat; orice alt punct $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, \mathrm{i}, \infty\}$ este punct regulat pentru această ecuație. Ecuația dată nu este de tip Fuchs.

4. Ecuația $(\sin z)w'' + z\,w' + z^2\,w = 0$, pentru care $a(z) = \dfrac{z}{\sin z}$, $b(z) = \dfrac{z^2}{\sin z}$, are punctele singulare la distanță finită $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Deoarece pentru $z = 0$ atît a cît și b au o singularitate aparentă, punînd $a(0) = 1$ și $b(0) = 0$, pentru $|z| < \pi$ funcțiile a și b vor fi olomorfe; rezultă o infinitate de puncte singulare $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ale ecuației date (la distanță finită). Cum zerourile lui $\sin z$, pentru $z = k\pi$, sînt simple, rezultă că z_k sînt puncte singulare regulate. Pentru $z = \infty$, coeficienții a și b au o singularitate esențială și, prin urmare, ecuația în cauză nu este de tip Fuchs.

5. Ecuația diferențială

$$(z - a)(z - b)w'' + z\,w' - w = 0, \qquad a, b \in \mathbb{C}, \qquad a \neq b,$$

pentru care $a(z) = \dfrac{z}{(z - a)(z - b)}$, $b(z) = \dfrac{-1}{(z - a)(z - b)}$ are trei puncte singulare: $z = a$, $z = b$ și $z = \infty$. Se verifică ușor că toate aceste puncte singulare sînt regulate, ceea ce face ca ecuația să fie de tip Fuchs.

Dacă $a = b \neq 0$, punctul singular $z = a$ este neregulat (coeficientul a avînd pol dublu pentru $z = a$), dar dacă în plus $a = b = 0$ se va obține o ecuație cu două puncte singulare ($z = 0$ și $z = \infty$) regulate și deci iarăși este vorba de o ecuație de tip Fuchs.

De menționat că dacă $z = z_0$ este un punct singular neregulat pentru ecuația (11.9'), atunci nu vor exista soluții de forma $(z - z_0)^\rho f(z)$ în vecinătatea lui $z = z_0$ ci cel mult soluții de forma $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$. Se obișnuiește uneori să se facă distincție între punctele singulare neregulate ale ecuației (11.9'): astfel, dacă a și b au singularități de tip pol în z_0 (deci pol de ordin superior lui unu pentru coeficientul a sau pol de ordin superior lui doi pentru coeficientul b), atunci z_0 se mai numește *punct singular neregulat de ordin finit* și *punct singular neregulat de ordin infinit* dacă $z = z_0$ este un punct singular esențial pentru cel puțin unul din coeficienții a sau b.

Teorema 11.3. *Ecuația diferențială liniară și omogenă de ordinul al doilea*

$$w'' + a(z)w' + b(z)w = 0$$

este de tip Fuchs, avînd singularități slabe în punctele $z_1, z_2, \ldots, z_m, \infty$, *dacă*

$$a(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{z - z_k}, \quad b(z) = \sum_{k=1}^{m} \left[\frac{B_k}{(z - z_k)^2} + \frac{C_k}{z - z_k} \right], \tag{11.14}$$

în care $A_k, B_k, C_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \ldots, m$, *iar*

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_m = 0. \tag{11.15}$$

Punctul ∞ *va fi un punct regulat pentru ecuația în cauză dacă se verifică egalitățile*

$$\sum_{k=1}^{m} A_k = 2, \quad \sum_{k=1}^{m} (B_k + z_k C_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{m} z_k(2B_k + z_k C_k) = 0. \tag{11.16}$$

Deoarece punctele $z_1, \ldots, z_m$ sînt singularități slabe, adică puncte singulare regulate pentru ecuația considerată, acestea sînt poli de ordin maxim unu, respectiv doi, pentru coeficienții a, respectiv b ai ecuației; deoarece și punctul de la infinit este o singularitate de tip pol pentru acești coeficienți, rezultă că a și b sînt funcții raționale, avînd forma

$$a(z) = \frac{P(z)}{(z - z_1) \ldots (z - z_m)}, \quad b(z) = \frac{Q(z)}{(z - z_1)^2 \ldots (z - z_m)^2}, \tag{11.17}$$

unde P și Q sînt polinoame. Impunînd acum condițiile (11.12), care asigură singularitatea slabă a punctului de la infinit, rezultă restricții pentru P și Q; astfel, pentru a avea $\lim_{z\to\infty} a(z) = 0$, rezultă $\deg P \leqslant m - 1$ iar pentru a avea $\lim_{z\to\infty} b(z) = 0$, trebuie ca $\deg Q \leqslant 2m - 1$, ceea ce

conduce la relațiile (11.14), dacă se descompun funcțiile raționale a și b în funcții raționale simple. Impunînd celei de-a doua egalități (11.14) condiția rămasă $\lim_{z\to\infty} zb(z) = 0$, rezultă egalitatea (11.15). Egalitățile (11.16) se obțin cu ajutorul condițiilor (11.13) care asigură regularitatea în $z = \infty$ a soluțiilor ecuației date; astfel prima relație (11.16) decurge din a doua condiție (11.13), iar ultimele două egalități (11.16) vor fi consecințe ale ultimelor două condiții (11.13), dacă se scriu egalitățile

$$\frac{1}{z - z_k} = \frac{1}{z} + \frac{z_k}{z^2} + \frac{z_k^2}{z^3} + \dots, \qquad \frac{1}{(z - z_k)^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{2z_k}{z^3} + \frac{3z_k^2}{z^4} + \dots$$

valabile în vecinătatea lui $z = \infty$. Utilizînd expresia (11.4) pentru b, se obține

$$b(z) = \sum_{k=1}^{m} C_k \left(\frac{1}{z} + \frac{z_k}{z^2} + \frac{z_k^2}{z^3} + \dots\right) + \sum_{k=1}^{m} B_k \left(\frac{1}{z^2} + \frac{2z_k}{z^3} + \frac{3z_k^2}{z^4} + \dots\right) =$$

$$= \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{m} C_k + \frac{1}{z^2} \sum_{k=1}^{m} (C_k z_k + B_k) + \frac{1}{z^3} \sum_{k=1}^{m} (C_k z_k^2 + 2B_k z_k) + \dots$$

și deci în baza lui (11.15) și (11.13) se obțin egalitățile (11.6). □

Este ușor de verificat că egalitatea (11.15) este echivalentă cu ipoteza că polinomul Q din (11.17) are gradul $\leqslant 2m - 2$.

Exemple

6. Ecuații diferențiale de ordinul al doilea, de tip Fuchs, cu nici un punct singular regulat nu există, deoarece ar însemna ca toate punctele din $\mathbb{C}$ să fie puncte de regularitate pentru soluție, ceea ce (în baza teoremei lui Liouville) este echivalent cu faptul că soluția este o constantă și deci ecuația diferențială verificată de $w = w_0$ este $w' = 0$ (deci nu este de ordinul al doilea).

7. Ecuația diferențială de ordinul al doilea, de tip Fuchs, cu un singur punct singular regulat, $z = z_1$, va avea coeficienții $a(z) = \dfrac{A_1}{z - z_1}$, $b(z) = \dfrac{B_1}{(z - z_1)^2} + \dfrac{C_1}{z - z_1}$ și în baza teoremei 11.3, vom avea $C_1 = 0$; deoarece $z = \infty$ trebuie să fie un punct de olomorfie, din condițiile (11.13) rezultă $A_1 = 2$, $B_1 = 0$, deci ecuația va fi de forma simplă $w'' + \dfrac{2}{z - z_1} w' = 0$. Orice soluție a acestei ecuații se obține prin particularizarea constantelor C_1 și C_2 din $w(z) = C_1 + C_1(z - z_1)^{-1}$. Dacă punctul singular regulat este $z = \infty$, atunci forma ecuației va fi $w'' = 0$, ceea ce este echivalent cu forma anterioară, după efectuarea schimbării $z \to (z - z_1)^{-1}$ care atașează lui $z = z_1$ pe $z = \infty$.

8. Ecuația diferențială de ordinul al doilea, de tip Fuchs, cu două puncte singulare regulate, $z = z_1$ și $z = z_2$, $z_1 \neq z_2$, va avea coeficienții

$$a(z) = \frac{A_1}{z - z_1} + \frac{B_2}{z - z_2}, \quad b(z) = \frac{B_1}{(z - z_1)^2} + \frac{B_2}{(z - z_2)^2} + \frac{C_1}{z - z_1} + \frac{C_2}{z - z_2},$$

unde $C_1 + C_2 = 0$; pentru ca punctul de la infinit să fie punct de olomorfie pentru soluție, va rezulta din (11.13)

$$A_1 + A_2 = 2, \; B_1 + B_2 + C_1(z_2 + z_1) = 0, \qquad C_1 = 0, \; B_1 + B_2 = 0,$$

adică

$$a(z) = \frac{A_1}{z - z_1} + \frac{2 - A_1}{z - z_2}, \quad b(z) = \frac{B_1}{(z - z_1)^2} - \frac{B_2}{(z - z_2)^2},$$

Dacă $z_2 = \infty$, se obține $a(z) = \dfrac{A_1}{z - z_1}$, $b(z) = \dfrac{B_1}{(z - z_1)^2}$ iar ecuația diferențială de tip Fuchs, de ordinul al doilea cu z_1 și ∞ puncte singulare regulate are forma

$$w'' + \frac{A_1}{z - z_1} w' + \frac{B_1}{(z - z_1)^2} w = 0, \quad A_1, B_1 \in \mathbb{C},$$

deci este o ecuație diferențială de tip Euler. Dacă punctele singulare regulate sînt z_1 și z_2, $z_1 \neq z_2$, atunci efectuînd transformarea $z \to (z - z_2)^{-1}$, ecuația obținută va avea punctele singulare regulate $(z_1 - z_2)^{-1}$ și ∞, deci va fi de tip Euler.

Cazul ecuației diferențiale de ordinul al doilea cu trei puncte singulare regulate va fi tratat în cap. 12.

Vom încheia aceste considerații cu unele observații.

Astfel, scriind ecuația determinantă pentru punctul singular $z = z_k$, se obține $\rho^2 - (1 - A_k)\rho + B_k = 0$ și deci, notînd $\rho_1^{(k)}$, $\rho_2^{(k)}$ rădăcinile acesteia, deoarece $\rho_1^{(k)} + \rho_2^{(k)} = 1 - A_k$, $\rho_1^{(k)} \cdot \rho_2^{(k)} = B_k$, ceea ce înseamnă că în locul coeficienților A_k și B_k, $k = 1, 2, \dots, m$, se pot scrie expresiile acestora prin $\rho_1^{(k)}$, $\rho_2^{(k)}$; va rezulta deci că ecuația de tip Fuchs cu $m + 1$ puncte singulare va fi

$$w'' + \sum_{k=1}^{m} \frac{1 - \rho_1^{(k)} - \rho_2^{(k)}}{z - z_k} w' + \left[\sum_{k=1}^{m} \frac{\rho_1^{(k)} \cdot \rho_2^{(k)}}{(z - z_k)^2} + \sum_{k=1}^{m} \frac{C_k}{z - z_k}\right] w = 0, \tag{11.18}$$

$$\sum_{k=1}^{m} C_k = 0.$$

Dacă și punctul $z = \infty$ este punct singular regulat al ecuației, cu ajutorul trasformării $z \to \frac{1}{z}$ ecuația determinantă pentru $z = 0$ va fi

$$\rho(\rho - 1) + \left[2 - \sum_{k=1}^{m} (1 - \rho_1^{(k)} - \rho_2^{(k)})\right] \rho + \sum_{k=1}^{m} (\rho_1^{(k)} \cdot \rho_2^{(k)} + C_k z_k) = 0;$$

notînd $\rho_1^{(\infty)}$, $\rho_2^{(\infty)}$ rădăcinile acestei ecuații, deoarece $\rho_1^{(\infty)} + \rho_2^{(\infty)} = \sum_{k=1}^{m} (1 - \rho_1^{(k)} - \rho_2^{(k)}) - 1$, se obține rezultatul următor, cunoscut ca *relația lui Fuchs*:

Suma tuturor rădăcinilor ecuațiilor determinante ale unei ecuații de tip Fuchs cu $m + 1$ puncte singulare (între care este *cuprins și punctul de la infinit*) *este întotdeauna egal cu $m - 1$* (adică egal cu numărul punctelor singulare la distanță finită, mai puțin o unitate).

Dacă un punct singular z_0 al unei ecuații diferențiale de ordinul al doilea nu este punct singular regulat, atunci nu pot exista două soluții de forma $(z - z_0)^{\rho} f_j(z)$, $j = 1, 2$, iar uneori este posibil să existe cel mult o soluție de această formă (de exemplu dacă se poate obține o ecuație de tipul ecuației determinante, dar de gradul întîi).

Dacă într-o ecuație de tip Fuchs se trece la un proces de limită, făcînd ca unul sau mai multe puncte singulare regulate să coincidă (de exemplu, $z_k \to z_0$, $k = 1, 2, \ldots, p$), atunci se obține o nouă ecuație diferențială în care z_0 va fi, de regulă, un punct singular neregulat. Acest procedeu de trecere la limită se numește *confluență* iar ecuația diferențială obținută prin confluență se numește *ecuație confluentă* (în raport cu ecuația inițială).

În legătură cu acest procedeu există un rezultat important datorit lui Klein și Bôcher, prin care se arată că majoritatea ecuațiilor diferențiale de ordinul al doilea ale fizicii matematice se pot obține ca forme confluente ale unei ecuații de tip Fuchs cu cinci puncte singulare regulate z_1, z_2, z_3, z_4 și ∞, de o formă specială, numită *ecuația lui Lamé*

$$w'' + \left(\sum_{k=1}^{4} \frac{\frac{1}{2} - 2a_k}{z - z_k}\right) w' + \left[\sum_{k=1}^{4} \frac{a_k\left(a_k + \frac{1}{2}\right)}{(z - z_k)^2} + \right. \tag{11.19}$$

$$\left. + \frac{Az^2 + 2Bz + C}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)}\right] w = 0.$$

Comparînd ecuațiile (11.18) și (11.19), rezultă ca o caracteristică a ecuației Lamé faptul că rădăcinile ecuației determinante pentru punctele singulare situate la distanță finită au diferența egală cu $\frac{1}{2}$: $\rho_1^{(k)} = a_k$, $\rho_2^{(k)} = a_k + \frac{1}{2}$.

Ecuațiile diferențiale de ordinul al doilea particulare care se pot obține din ecuația Lamé se clasifică după numărul singularităților (regulate) pentru care $\rho_1^{(k)} - \rho_2^{(k)} = \frac{1}{2}$ (condiția I) după numărul singularităților (regulate) pentru care $\rho_1^{(k)} - \rho_2^{(k)} \neq \frac{1}{2}$ (condiția II) și după numărul singularităților neregulate (condiția III).

Astfel, *ecuația lui Legendre* $(1 - z^2)w'' - 2zw' + \lambda w = 0$ se obține dacă în condiția I avem un punct singular, în condiția II avem două puncte singulare iar în condiția III nu există puncte singulare, iar *ecuația lui Bessel* $z^2w'' + zw' + (z^2 - \nu^2)w = 0$ se obține dacă în condiția I, nici un punct singular și în condiția III, iarăși un singur punct singular etc.

De exemplu, ecuația lui Bessel se obține pentru $z_1 = z_2 = 0$, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ și pentru $z_3 = z_4 \to \infty$, cînd apare ecuația $z^2w'' + zw' + \frac{1}{4}(z - \nu^2)w = 0$, care este echivalentă cu ecuația Bessel (este suficientă transformarea $z \to z^2$ pentru a se obține această echivalență).

CAPITOLUL 12

Funcţia hipergeometrică şi funcţia hipergeometrică degenerată

12.1. Ecuaţia lui Gauss şi seria hipergeometrică

Ecuaţia de tip Fuchs cu trei puncte singulare regulate z_1, z_2 şi ∞ ($z_1 \neq z_2$), conform cu (11.8), se poate scrie sub forma

$$w'' + \left[\frac{1-\rho_1^{(1)}-\rho_2^{(1)}}{z-z_1} + \frac{1-\rho_1^{(2)}-\rho_2^{(2)}}{z-z_2}\right]w' +$$

$$+\left[\frac{\rho_1^{(1)}\cdot\rho_2^{(1)}}{(z-z_1)^2} + \frac{\rho_1^{(2)}\cdot\rho_2^{(2)}}{(z-z_2)^2} + \frac{C_1}{z-z_1} - \frac{C_1}{z-z_2}\right]w = 0, \qquad (12.1)$$

unde $\rho_j^{(1)}$, $\rho_j^{(2)}$, $j = 1, 2$, sînt rădăcinile ecuaţiei determinante pentru punctul singular regulat z_j, $j = 1, 2$; deoarece transformarea $z \to \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ transformă punctele z_1, z_2, ∞ în punctele $0, 1, \infty$, cu acelaşi grad de generalitate, în locul ecuaţiei (12.1) se poate considera ecuaţia

$$w'' + \left(\frac{1-\rho_1^0-\rho_2^0}{z} + \frac{1-\rho_1^1-\rho_2^1}{z-1}\right)w' +$$

$$+\left[\frac{\rho_1^0\rho_2^0}{z^2} + \frac{\rho_1^1\rho_2^1}{(z-1)^2} + \frac{C_1}{z} - \frac{C_1}{z-1}\right]w = 0 \qquad (12.1')$$

iar deoarece transformarea $w \to z^\alpha(z-1)^\beta w(z)$ lasă invariante punctele singulare $0, 1, \infty$, dar modifică rădăcinile ecuaţiei determinante (în loc de ρ_1^0 şi ρ_2^0 vor apărea $\rho_1^0 + \alpha$, $\rho_2^0 + \alpha$ iar în loc de ρ_1^1 şi ρ_2^1 vor apărea $\rho_1^1 + \beta$, $\rho_2^1 + \beta$, deoarece dacă w are forma $z^\rho f(z)$, transformarea indicată va conduce la $z^\alpha(z-1)^\beta w(z) = z^{\alpha+\rho}(z-1)^\beta f(z) = z^{\alpha+\rho}f_1(z)$, $f_1(z) = (z-1)^\beta f(z)$ fiind evident olomorfă în vecinătatea lui $z = 0$ etc.), fără a se micşora generalitatea, putem presupune $\rho_1^0 = 0$, $\rho_1^1 = 0$ şi vom nota $\rho_2^0 = 1 - c$, $\rho_2^1 = c - a - b$, ceea ce face ca în locul ecuaţiei (12.1') să se scrie ecuaţia echivalentă

$$w'' + \left(\frac{c}{z} + \frac{a+b+1-c}{z-1}\right)w' + \left(\frac{C_1}{z} - \frac{C_1}{z-1}\right)w = 0, \qquad (12.1'')$$

în care C_1 se determină din relaţia lui Fuchs (vezi cap. 11):

$$\rho_1^\infty + \rho_2^\infty + (1-c) + (c-a-b) = 1,$$

adică $\rho_1^\infty + \rho_2^\infty = a + b$, ρ_1^∞ şi ρ_2^∞ fiind rădăcinile ecuaţiei determinante pentru punctul singular $z = \infty$ al ecuaţiei (12.1''), adică ale ecuaţiei $\rho(\rho-1) + (1-a-b)\rho - C_1 = 0$. Deoarece $\rho_1 + \rho_2 = a + b$, rezultă $C_1 = -ab$ (deoarece C_1 reprezintă produsul rădăcinilor ρ_1^∞ şi ρ_2^∞ a căror sumă este $a + b$); înlocuind $C_1 = -ab$ în ecuaţia (12.1''), se obţine *ecuaţia diferenţială Gauss*:

$$z(1-z)w'' + [c - (a+b+1)z]w' - ab\,w = 0, \qquad (12.2)$$

în care $a, b, c \in \mathbb{C}$ sînt parametrii ecuaţiei Gauss şi au semnificaţia următoare: a şi b sînt rădăcinile ecuaţiei determinante pentru punctul singular regulat $z = \infty$, deci, pentru $|z| > R$ ecuaţia (12.2) admite soluţii de forma $\dfrac{1}{z^a}\left(1 + \dfrac{a_1}{z} + \dfrac{a_2}{z^2} + \dots\right)$, $\dfrac{1}{z^b}\left(1 + \dfrac{b_1}{z} + \dfrac{b_2}{z^2} + \dots\right)$, iar $1 - c$ este una din rădăcinile ecuaţiei determinante pentru punctul singular regulat $z = 0$, cealaltă rădăcină fiind nulă. Deoarece ecuaţia determinantă pentru punctul singular regulat $z = 1$ are rădăcinile 0 şi $c - a - b$, pentru a se exprima faptul că ecuaţia (12.2) are punctele singulare regulate $0, 1, \infty$ cu rădăcinile ecuaţiei determinante $(0, 1-c)$, $(0, c-a-b)$ şi (a, b) pentru aceste puncte singulare, se utilizează *simbolul* (sau *schema*) P la *lui Riemann*

$$w = P\left\{\begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a\,;\,z \\ 1-c & c-a-b & b \end{array}\right\}, \qquad (12.3)$$

în care în prima linie apar punctele singulare ale ecuației (12.2), elementele aflate sub aceste puncte singulare reprezentînd rădăcinile ecuației determinante corespunzătoare punctului singular din prima linie iar în ultima coloană se scrie variabila independentă din ecuația (12.2). Deoarece pentru $z = 0$ una din soluțiile ecuației (12.2) este de forma $z^0 f(z) = f(z)$, deci este o funcție olomorfă pentru $|z|<1$ (punctul singular cel mai apropiat de origine fiind $z = 1$), această soluție se numește *serie hipergeometrică* sau *funcție hipergeometrică* și se notează ${}_2F_1(a, b; c; z)$; vom avea

$$ {}_2F_1(a, b; c; z) = 1 + \frac{a \cdot b}{1!c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)} z^2 + \dots $$

$$ \dots + \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)b(b+1)\dots(b+n-1)}{n!c(c+1)\dots(c+n-1)} z^n + \dots \tag{12.4} $$

datorită notației consacrate

$$ {}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n}{n!(b_1)_n \dots (b_q)_n} z^n, $$

unde $(x)_n = x(x+1)\dots(x+n-1)$, $(x_0) = 1$, deci

$$ {}_2F_1(a, b; c; z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n!(c)_n} z^n \tag{12.4'} $$

și este evident că seria hipergeometrică are sens pentru orice valori complexe ale parametrilor a, b, c, exceptînd $c \in \mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, \dots\}$. Dacă însă $c \in \mathbb{Z}_-$, atunci se înlocuiește soluția ${}_2F_1$ prin soluția cealaltă $z^{1-c} f(z)$ iar cum $1 - c \in \mathbb{N}$, soluția a doua a ecuației (12.2), valabilă în vecinătatea lui $z = 0$, va conține neapărat un termen logaritmic, deoarece $\rho_1^0 - \rho_2^0 = 0 - (1 - c) = c - 1 \in \mathbb{Z}$ (se mai poate utiliza și exercițiul 9). Se obișnuiește să se atașeze simbolului (schemei) (12.3) chiar soluția ${}_2F_1$, adică se presupune că soluția ecuației (12.2) în care parametrii a, b și c sînt dispuși ca în schma (12.3) este dată de (12.4).

Pentru a justifica (12.4), se scrie

$$ {}_2F_1(a, b; c; z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, $$

coeficienții a_n determinînsu-se, ca de obicei, prin înlocuirea seriei în cauză în ecuația (12.2); se va obține prin aranjarea termenilor, o nouă serie de puteri, a cărei sumă fiind nulă, toți coeficienții vor fi nuli. Cum $-[n(n-1) + (a+b+1)n + ab]a_n + (n+1)(n+c)a_{n+1}$ este coeficientul lui z^n din seria obținută prin înlocuire în ecuația ui Gauss a soluției ${}_2F_1$, va rezulta relația de recurență

$$ a_{n+1} = \frac{(n+a)(n+b)}{(n+1)(n+c)} a_n, \; n = 0, 1, 2, \dots, a_0 = 1, \tag{12.5} $$

din care, din aproape în aproape, se deduce dezvoltarea (12.4). Din (12.5) se deduce $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{(n+1)|n+c|}{|n+a||n+b|}$ și deci, dacă $a, b \notin \mathbb{Z}_-$, rezultă $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1$, R fiind raza de convergență a seriei hipergeometrice (12.4) (deoarece $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$); se obține astfel o confirmare a afirmației anterioare referitoare la mulțimea de convergență a seriei (12.4). Raportul anterior permite însă și o discuție asupra comportării seriei hipergeometrice pe frontiera cercului de convergență $|z| = 1$: cum

$$ \frac{a_n}{a_{n+1}} = (1+n)(c+n)(a+n)^{-1}(b+n)^{-1} = 1 + \frac{1+c-a-b}{n} + \dots, $$

termenii nescriși conținînd pe $\frac{1}{n^2}$ factor [deoarece $(a+n)^{-1} = \frac{1}{n\left(1+\frac{a}{n}\right)} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{a}{n} + \frac{a^2}{n^2} + \dots\right)$ etc.], dacă $\mathrm{Re}(c-a-b) > 0$, seria ${}_2F_1$ este absolut și uniform convergentă pe întreaga frontieră a cercului unitate (în baza creiteriului lui Raabe), deci și pentru $z = 1$; apoi dacă $-1 < \mathrm{Re}\,(c-a-b) < 0$, atunci seria este uniform convergentă pe S_δ, unde $z \in S_\delta$ dacă $|z| = 1$ și $\arg z \notin]-\delta, +\delta[$, $\delta > 0$ fiind arbitrar de mic iar dacă $\mathrm{Re}\,(c-a-b) \leqslant -1$, orice punct al cercului de convergență este punct de divergență.

Importanța seriei hipergeometrice constă în faptul că orice soluție a ecuației (12.2), în vecinătatea oricărui punct singular al acesteia, este exprimabilă cu ajutorul lui ${}_2F_1$. Astfel, a doua soluție a ecuației (12.2) valabilă în vecinătatea lui $z = 0$ se poate obține

prin transformarea $w \to z^{c-1}w$, care lasă invariante punctele singulare, modificînd doar soluţiile ecuaţiei determinante pentru punctele singulare $z = 0$ şi $z = \infty$, $\rho_1^{(0)}$ şi $\rho_2^{(0)}$ se modifică în $\tilde{\rho}_1^{(0)} = c - 1$ şi $\tilde{\rho}_2^{(0)} = 0 [\rho_1^{(0)} = 0,\ \rho_2^{(0)} = 1 - c]$ iar $\rho_1^{(\infty)} = a$, $\rho_2^{(\infty)} = b$ se modifică în $\tilde{\rho}_1^{(\infty)} = a - c + 1$ şi $\tilde{\rho}_2^{(\infty)} = b - c + 1$; pentru punctul singular $z = 1$ ecuaţia determinantă nu se modifică, funcţia z^{c-1} fiind olomorfă pentru $z = 1$.

Aşadar, acestei schimbări a funcţiei necunoscute îi va corespunde următorul simbol Riemann:

$$P\left\{\begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a - c + 1;\ z \\ c - 1 & c - a - b & b - c + 1 \end{array}\right\}$$

care identificat cu simbolul standard

$$P\left\{\begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a_1;\ z \\ 1 - c_1 & c_1 - a - b_1 & b_1 \end{array}\right\}$$

arată că $a_1 = a - c + 1$, $b_1 = b - c + 1$, $c_1 = 2 - c$, ceea ce coincide cu soluţia ${}_2F_1(a_1, b_1; c_1; z) = {}_2F_1(a - c + 1,\ b - c + 1;\ 2 - c; z)$ şi, prin urmare, a doua soluţie a ecuaţiei (12.2), valabilă în vecinătatea lui $z = 0$, va fi $z^{1-c}{}_2F_1(a - c + 1, b - c + 1;\ z - c; z)$ [această soluţie este liniar independentă de ${}_2F_1(a, b; c; z)$ dacă $c \notin \mathbb{Z}$]. Prin urmare, orice soluţie a ecuaţiei lui Gauss valabilă pentru $\{|z| < 1\} \setminus \{0\}$ va fi obţinută prin particularizarea constantelor A şi B din expresia

$$w_0(z) = A\,{}_2F_1(a, b; c; z) + B\, z^{1-c}\,{}_2F_1(a - c + 1, b - c + 1; 2 - c; z)$$

evident ${}_2F_1(a - c + 1, b - c + 1; 2 - c; z)$ este seria (12.4) în care în loc de a, b, c se pune $a - c + 1$, $b - c + 1$, $2 - c$ respectiv. Raţionamentul anterior nu face altceva decît să elimine un calcul de înlocuire a lui w din ecuaţia (12.2) prin $z^{1-c}u(z)$, u fiind noua funcţie necunoscută; dacă se efectuează acest calcul, se obţine tot ecuaţia lui Gauss dar parametrii a, b şi c se vor modifica în parametrii a_1, b_1 şi c_1.

Pentru a determina un sistem fundamental de soluţii ale ecuaţiei (12.2) pentru punctul singular $z = 1$, este suficientă schimbarea de variabilă independentă $1 - z \to z$ care permută între ele punctele singulare $z = 0$ şi $z = 1$ şi lasă nemodificat punctul singular $z = \infty$;

ecuaţia (12.2) transformată va avea parametrii a, b şi $a + b - c + 1$, ceea ce face ca orice soluţie a ecuaţiei lui Gauss din vecinătatea lui $z = 1$ să se poată scrie sub forma

$$w_1(z) = C\,{}_2F_1(a, b; a + b - c + 1; 1 - z) +$$

$$+ D(1 - z)^{c-a-b}\,{}_2F_1(c - b,\ c - a;\ 1 + c - a - b; 1 - z),$$

dedusă din w_0 prin înlocuirile corespunzătoare.

În fine, pentru punctul singular $z = \infty$, soluţiile se pot obţine cu ajutorul seriei hipergeometrice ${}_2F_1$ dacă se efectuează transformarea $z \to \frac{1}{z}$ care permută între ele punctele singulare $z = 0$ şi $z = \infty$ dar nu-l modifică pe $z = 1$; rezultă că simbolul Riemann corespunzător ecuaţiei transformate va fi

$$P\left\{\begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ a & 0 & 0 \\ b & c - a - b & 1 - c \end{array};\ \frac{1}{z}\right\}$$

care pentru a putea fi comparat cu simbolul standard trebuie realizată o transformare care să conducă la apariţia unui termen nul în prima coloană (în linia a doua); or această transformare va fi $w \to \left(\frac{1}{z}\right)^a w$, care face să apară simbolul Riemann

$$P\left\{\begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ b - a & c - a - b & a - c + 1 \end{array};\ \frac{1}{z}\right\}.$$

În definitv, soluţia corespunzătoare punctului singular $z = \infty$ se va scrie sub forma

$$w_\infty(z) = E\, z^{-a}\,{}_2F_1\left(a, a - c + 1;\ 1 + a - b; \frac{1}{z}\right) +$$

$$+ Fz^{-b}\,{}_2F_1\left(b, b - c + 1; b - c + 1; \frac{1}{z}\right),$$

$E, F \in \mathbb{C}$, care se obține din w_0 prin înlocuirea parametrilor a, b, c prin parametrii a, $a - c + 1$, $a + 1 + b$ și multiplicîndu-l cu z^{-a}.

O proprietate importantă a seriei hipergeometrice este aceea că este o funcție simetrică în parametrii a și b: ${}_2F_1(a, b; c; z) = {}_2F_1(b, a; c; z)$ iar dacă a (sau b) este un număr întreg nepozitiv (de exemplu dacă $a = -n$, $n \in \mathbb{N}$), atunci seria hipergeometrică degenerează într-un polinom de grad n. Aceste poliniame se numesc *polinoame Jacobi* și vor fi studiate separat ulterior (vezi cap. 14).

Vom încheia considerațiile relative la seria hipergeometrică prin deducerea unei reprezentări sub formă integrală a acestei funcții; anume, are loc egalitatea

$$ {}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-zt)^{-b}\,dt, \quad (12.6) $$

dacă $0 < \operatorname{Re} a < \operatorname{Re} c$.

Într-adevăr, deoarece $0 \leqslant t \leqslant 1$, t fiind variabilă de integrare, dacă se presupune $|z| < 1$, vom avea $|zt| < 1$ și deci în baza dezvoltării lui Abel avem $(1-zt)^{-b} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n}{n!} z^n t^n$ și deci

$$ \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-zt)^{-b}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n}{n!} z^n \int_0^1 t^{a+n-1}(1-t)^{c-a-1}\,dt = $$

$$ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n}{n!} z^n B(a+n, c-a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n z^n}{n!} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c+n)} = $$

$$ = \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n!\,(c)_n} z^n = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} {}_2F_1(a, b; c; z), $$

calculele fiind valabile dacă $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re}(c-a) > 0$ [s-a utilizat egalitatea $(a)_n \Gamma(a) = \Gamma(a+n)$, $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Re} a > 0$].

Exerciții și completări

1°. Să se arate că orice ecuație diferențială de forma

$$ (z - z_1)(z - z_2)w'' + (Az + B)w' + Cw = 0, \quad z_1 z_2, A, B, C \in \mathbb{C}, \ z_1 \neq z_2, $$

se poate reduce la ecuația lui Gauss.

Indicație. Se aplică schimbarea de variabilă $z \to \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ care transformă punctele singulare z_1 și z_2 ale ecuației date în punctele $z = 0$, $z = 1$.

2°. Să se integreze cu ajutorul ecuației lui Gauss ecuația diferențială

$$ (1 - z^2)w'' - (2\alpha + 1)zw' + n(n + 2\alpha)w = 0, \quad \alpha \in \mathbb{C}. $$

Indicație. Se aplică exercițiul 1 și se obține ecuația Gauss cu parametrii $a = -n$, $b = 2\alpha + n$, $c = \alpha + \frac{1}{2}$; rezultă că ecuația dată admite ca soluție particulară un polinom de grad n.

3°. Să se deducă egalitatea ${}_2F_1(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b; c; z)$, numită formula de autotransformare a funcției hipergeometrice.

4°. Să se stabilească egalitatea $\int_1^{\infty} t^{b-c}(t-1)^{c-a-1}(t-z)^{-b}\,dt =$

$$ = \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} {}_2F_1(a, b; c; z) \text{ pentru } 0 < \operatorname{Re} a < \operatorname{Re} c. $$

Indicație. Se efectuează în (12.6) schimbarea $t \to \frac{1}{t}$.

5°. Să se arate că dacă există $\lim_{z \to 1} {}_2F_1(a, b; c; z)$, atunci ${}_2F_1(a, b; c; 1) =$

$$ = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}. $$

Indicație. Se folosește reprezentarea integrală (12.6).

6°. Să se arate că primitiva funcției $f(x) = x^{r-1}(1-x)^{s-1}$, $r, s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} r > 0$, $\operatorname{Re} s > 1$, se exprimă cu ajutorul seriei hipergeometrice.

Indicație. Cu ajutorul formulei (12.6), prin schimbarea de variabilă $xt \to t$ se obține

$$ \int_1^x t^{r-1}(1-t)^{s-1}\,dt = \frac{x^r}{r} \cdot {}_2F_1(1-s, r; r+1; x). $$

7°. Să se stabilească egalitățile următoare:

$$ \frac{d}{dz} {}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{ab}{c} {}_2F_1(a+1, b+1; c+1; z); $$

$$\frac{d}{dz}\left[z^a {}_2F_1(a, b, ; c ; z)\right] = a z^{a-1} {}_2F_1(a+1, b ; c ; z);$$

$$\frac{d}{dz}\left[z^b {}_2F_1(a, b ; c ; z)\right] = b z^{b-1} {}_2F_1(a, b+1 ; c ; z); \frac{d}{dz} {}_2F_1(a, b, ; c ; z)] =$$

$$= (c-1) z^{c-2} {}_2F_1(a, b ; c-1 ; z); \frac{d}{dz}\left[z^{c-a}(1-z)^{a+b-c} {}_2F_1(a, b ; c ; z)\right] =$$

$$= (c-a) z^{c-a-1}(1-z)^{a+b-c-1} {}_2F_1(a-1, b ; c ; z);$$

$${}_2F_1(1, 1 ; 2 ; z) = \frac{1}{z} \ln \frac{1}{1-z}; {}_2F_1(-2n, a ; 2a ; 2) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{\left(a+\frac{1}{2}\right)_n};$$

$${}_2F_1(-2n-1, a ; 2a ; 2) = 0, n \in \mathbb{N}; {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} ; \frac{3}{2} ; x^2\right) = \frac{1}{x} \arcsin x.$$

8°. Să se arate că ecuația lui Riemann (care admite numai trei singularități slabe în punctele $a, b, c \in \mathbb{C}$)

$$w'' + \left(\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a} + \frac{1-\beta-\beta'}{z-b} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{z-c}\right)w' + \left[\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{z-a} + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta\beta'(b-a)(b-c)}{z-b} + \frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{z-c}\right] \frac{w}{(z-a)(z-b)(z-c)} = 0$$

admite soluția $w(z) = \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma} {}_2F_1\left(\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta'+\gamma ; 1+\alpha-\alpha' ; \right.$

$\left.\frac{(c-b)(z-a)}{(c-a)(z-b)}\right), \alpha - \alpha' \notin \mathbb{Z}.$

Indicație. Se aplică succesiv două transformări : $z \to \frac{z-a}{z-b}$ care transformă $z = a$, $z = b$ în punctele $z = 0$, $z = \infty$ și apoi o transformare $w \to (z-c)^{\lambda} \cdot w$ și se determină λ astfel ca ecuația rezultantă să coincidă cu ecuația Gauss.

9°. Să se arate că orice derivată a funcției ${}_2F_1$ se poate exprima cu ajutorul seriei hipergeometrice.

Indicație. Derivînd ecuația lui Gauss de k ori, se obține ecuația

$z(1-z)u'' + [c+k-(a+b+2k+1)z]u' - [k^2+(a+b)k+ab]u = 0$, cu $u = w^{(k)}$ care este iarăși o ecuație Gauss dar cu parametrii $a+k$, $b+k$ și $c+k$.

12.2. Funcția hipergeometrică degenerată

Plecînd de la ecuația lui Gauss

$$z(1-z)w'' + [c-(a+b+1)z]w' - ab\,w = 0$$

prin transformarea $z = \frac{x}{b}$ se obține ecuația diferențială

$$x\left(1-\frac{x}{b}\right)\frac{d^2w}{dx^2} + \left(c - \frac{a+b+1}{b}x\right)\frac{dw}{dx} - aw = 0, \quad (12.7)$$

care este evident de tip Fuchs, avînd punctele singulare regulate 0, b și ∞; utilizînd procedeul de confluență definit în cap. 11, dacă $b \to \infty$, se va obține din ecuația (12.7) o nouă ecuație diferențială

$$xw'' + (c-x)w' - aw = 0, \quad (12.7')$$

care are două puncte singulare : $z = 0$ și $z = \infty$. Evident $z = 0$ este un punct singular regulat al ecuației (12.7'), pe cînd $z = \infty$ este un punct singular neregulat [dacă ar fi punct singular regulat, ecuația (12.7) ar fi de tip Euler, ceea ce evident nu este cazul] și deci ecuația diferențială (12.7') nu este de tip Fuchs.

Ecuația (12.7') se numește *ecuația lui Kummer* (sau *ecuația Gauss degenerată* (*confluentă*)) iar soluția ei care se deduce prin confluență din seria hipergeometrică se numește fie *funcția lui Kummer* fie *seria* (*funcția*) *hipergeometrică degenerată* (*confluentă*) și se notează ${}_1F_1(a ; c ; x)$. Deci ${}_1F_1(a ; c ; x) = \lim_{b\to\infty} {}_2F_1\left(a, b ; c ; \frac{x}{b}\right)$ și deoarece $\lim_{b\to\infty} \frac{(b)_n}{n!} = 1$, va rezulta egalitatea

$${}_1F_1(a ; c ; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!(c)_n} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{x}{n!}, a, c \in \mathbb{C}, c \notin \mathbb{Z}_-, \quad (12.8)$$

care se poate deduce și direct din ecuația (12.7′) căutînd soluții de forma $w(x) = 1 + \sum_{n-1}^{\infty} a_n x^n$, obținîndu-se pentru determinarea coeficienților relația de recurență $a_{n+1} = \dfrac{a+n}{(n+1)(c+n)} a_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $a_0 = 1$.

Funcția lui Kummer ${}_1F_1$ va fi o funcție întreagă, deoarece este ușor de verificat că raza de convergență a seriei (12.8) este $R = \infty$; în particular ${}_1F_1(a\,;\,a\,;\,x) = \exp(x) = e^x$.

Din rezultatele relative la funcția hipergeometrică expuse în 12.1 se pot obține (prin trecere la limită) consecințe pentru funcția lui Kummer; astfel, din expresia lui w_0, care constituie forma generală a soluției ecuației lui Gauss în vecinătatea originii, se obține

$$w(x) = A\,{}_1F_1(a\,;\,c\,;\,x) + B \cdot x^{1-c}\,{}_1F_1(a-c+1\,;\,2-c\,;\,x),\quad c \notin \mathbb{Z}_-,$$

iar din reprezentarea integrală (12.6) se obține reprezentarea integrală a funcției lui Kummer

$$ {}_1F_1(a\,;\,c\,;\,x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1} \exp(tx)\,dt, \qquad (12.9)$$

$$0 < \operatorname{Re} a < \operatorname{Re} c,$$

din care, se poate obține ușor formula de autotransformare a funcției lui Kummer:

$$ {}_1F_1(a\,;\,c\,;\,x) = \exp(x)\,{}_1F_1(c-a\,;\,c\,;\,x). \qquad (12.10)$$

Egalitatea (12.10), care este valabilă pentru orice $a \in \mathbb{C}$ și orice $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$, se numește *formula lui Kummer*.

Dacă $a \in \mathbb{Z}_-$, atunci funcția lui Kummer degenerează într-un polinom de grad n (dacă $a = -n$), numit *polinomul* Laguerre de grad n, care va fi studiat ulterior.

Exerciții și completări

1°. Să se deducă egalitatea

$$c\,{}_1F_1(a\,;\,c\,;\,x) = a\,{}_1F_1(a+1\,;\,c+1\,;\,x) + {}_1F_1(a\,;\,c+1\,;\,x)\,.\,(a-c).$$

Indicație. Se scrie $\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\exp(tx)\,dt = \int_0^1 (t+1-t)\,t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\exp(tx)\,dt =$

$$= \int_0^1 t^a (1-t)^{c-a-1}\exp(tx)\,dt + \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a}\,dt$$

și se utilizează (12.9).

2°. Să se deducă egalitățile următoare:

$${}_1F_1(a+1,\,c+1\,;\,x)\cdot x = {}_1F_1(a+1\,;\,c\,;\,x)\,.\,c - {}_1F_1(a\,;\,c\,;\,x)\cdot c;$$

$$\frac{d}{dx}\,[{}_1F_1(a\,;\,c\,;\,x)] = \frac{a}{c}\cdot {}_1F_1(a+1\,;\,c+1+x);\frac{d^k}{dx^k}\,[{}_1F_1(a\,;\,c\,;\,x)] =$$

$$= \frac{(a)_k}{(c)_k}\,{}_1F_1(a+k\,;\,c+k\,;\,x),\ k \in \mathbb{N};\ \int_0^x {}_1F_1(a+1\,;c+1\,;t)\,dt = \frac{c}{a}\,[{}_1F_1(a\,;c\,;x)-1]$$

3°. Să se arate că orice ecuație diferențială de forma

$$x^2y'' + (ax+b)y' + (cx+d)y = 0,\ a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{C},$$

se poate integra cu ajutorul funcției lui Kummer.

Indicație. Se efectuează schimbarea $y = \exp(rx)w$ și dacă se determină $r \in \mathbb{C}$ astfel încît să se verifice ecuația $r^2 + ar + c = 0$, se obține ecuația diferențială $xw'' + [b+(2r+a)x]w' + (rb+d)w = 0$, care cu transformarea $x \to \dfrac{x}{2r+a}$, dacă $2r + a \neq 0$ se transformă în ecuația (12.7′).

4°. Să se arate că dacă se definesc funcțiile $M_{k,m}$ prin relația

$$M_{k,m}(z) = z^{\frac{1}{2}+m}\exp\left(-\frac{z}{2}\right){}_1F_1\left(m-k+\frac{1}{2}\,;\,2m+1\,;\,z\right),$$

atunci funcția $M_{k,m}$ verifică ecuația diferențială

$$M'' + \left(\frac{k}{z} - \frac{1}{4} + \frac{1-4m^2}{4z^2}\right)M = 0,$$

numită ecuația Whittaker; să se arate că această ecuație se obține din ecuația (12.7′) prin aducerea acesteia la forma redusă (adică prin transformare $w \to f \cdot w$, noua ecuație să nu conțină derivata de ordinul întîi a funcției necunoscute).

5°. Să se arate că dacă $M_{k,m}(z)$ verifică ecuația lui Whittaker, atunci funcțiile $M_{k,-m}(z)$ și $M_{-k,m}(-z)$ verifică aceeași ecuație; să se deducă de aici faptul că funcția

$$w_{k,m}(z) = \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - m - k\right)} M_{k,m}(z) + \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + m - k\right)} M_{k,-m}(z),$$

numită funcția lui Whittaker este de asemenea o soluție a ecuației lui Whittaker.

Indicație. Se observă că ecuația nu se modifică dacă se pune $-m$ în loc de m sau dacă se schimbă semnele lui z și k.

CAPITOLUL 13

Funcții Bessel

În categoria funcțiilor speciale, *funcțiile Bessel* (sau *funcțiile cilindrice)* joacă un rol deosebit: nu există domeniu al analizei matematice sau al practicii în care să nu apară o funcție Bessel.

Prin *funcție Bessel* se înțelege orice soluție a ecuației diferențiale

$$z^2w'' + zw' + (z^2 - \nu^2)w = 0, \quad \nu \in \mathbb{C}, \tag{13.1}$$

care conține un parametru complex ν. Ecuația (13.1) se numește *ecuația Bessel* și are două puncte singulare: punctul $z = 0$, care este evident un punct singular regulat și punctul $z = \infty$, care este punct singular neregulat.

În baza teoriei generale din cap. 11 ecuația (13.1) va admite două soluții particulare de forma $w(z) = z^\rho f(z)$, f fiind o funcție olomorfă în planul complex $\mathbb{C}$ (deci este o funcție întreagă) iar ρ verifică ecuația determinantă pentru punctul singular $z = 0$, adică $\rho^2 - \nu^2 = 0$; cele două soluții vor fi deci de forma $w_j(z) = z^{\rho_j} f_j(z)$, $j = 1, 2$, $\rho_1 = +\nu$, $\rho_2 = -\nu$ și vor fi liniar independente dacă $\rho_1 - \rho_2 = 2\nu \notin \mathbb{Z}$.

13.1. Funcții Bessel de speța I

Prin *funcții Bessel de speța I* se înțeleg soluțiile ecuației Bessel (13.1) de forma

$$w_1(z) = z^{+\nu} f_1(z) \text{ sau } w_2(z) = z^{-\nu} f_2(z),$$

în care funcțiile întregi f_1 și f_2 sînt astfel încît $f_1(0) = \dfrac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}$, respectiv $f_2(0) = \dfrac{1}{2^{-\nu}\Gamma(1-\nu)}$; deoarece ecuația Bessel nu se modifică prin înlocuirea lui ν prin $-\nu$, rezultă că este suficient să-l determinăm pe f_1, deoarece f_2 se va obține din f_1 scriind $-\nu$ în loc de $+\nu$. Deoarece

$$f_1(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,\ a_0 = \frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)},$$

rezultă

$$w_1(z) = J_\nu(z) = z^\nu \cdot f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\nu}$$

(cu notația consacrată pentru funcțiile Bessel de speța I: J_ν și $J_{-\nu}$) și înlocuind în ecuația (13.1), se obține

$$z^\nu \sum_{n=0}^{\infty} [n(n+2\nu)a_n + a_{n-2}]z^n = 0 \text{ cu } a_{-2} = a_{-1} = 0.$$

Ecuația Bessel va fi verificată dacă coeficienții a_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, vor verifica relația de recurență

$$a_n = -\frac{1}{n(n+2\nu)} a_{n-2},\ a_{-1} = 0,\ n \in \mathbb{N}, \tag{13.2}$$

din care rezultă în primul rînd $a_1 = a_3 = \ldots = a_{2k+1} = \ldots = 0$ (pentru că $a_{-1}=0$), ceea ce înseamnă că de fapt în (13.2) avem $n = 2k$ și deci relația de recurență devine $a_{2k} = \dfrac{-a_{2k-2}}{2^2k(k+\nu)}$, ceea ce permite exprimarea lui a_{2k} cu ajutorul lui $a_0 = \dfrac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}$.

Va rezulta

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}k!(\nu+1)_k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu}\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)},$$

deoarece $\Gamma(k+1) = k!$ și $(\nu+1)_k\ \Gamma(\nu+1) = \Gamma(k+\nu+1)$ ceea ce conduce la următoarele expresii pentru funcțiile Bessel de speța I:

$$J_\nu(z) = z^\nu \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu},$$

$$J_{-\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\nu} \tag{13.3}$$

și astfel, cel puțin dacă $2\nu \notin \mathbb{Z}$, orice funcție Bessel se obține prin particularizarea constantelor A și B din expresia

$$w = AJ_\nu + BJ_{-\nu}. \tag{13.4}$$

Dacă $\nu = n \in \mathbb{Z}$, este ușor de văzut că funcțiile Bessel corespunzătoare J_n și J_{-n} verifică egalitatea

$$J_{-n} = (-1)^n J_n,\quad n \in \mathbb{Z}, \tag{13.5}$$

deci sînt liniar dependente; într-adevăr, deoarece $\dfrac{1}{\Gamma(k-n+1)} = 0$ pentru $k = 0, 1, \ldots, n-1$,

$$J_{-n}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}$$

și scriind $k = n + m$, va rezulta

$$J_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{\Gamma(n+m+1)\Gamma(m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n} = (-1)^n J_n(z).$$

Unele din cele mai simple și importante proprietăți ale funcțiilor Bessel J_ν se exprimă prin următoarele egalități:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^\nu J_\nu(z)] = z^\nu J_{\nu-1}(z),\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^{-\nu}J_{+\nu}(z)] = -z_{-\nu}J_{\nu+1}(z), \tag{13.6}$$

numite relaţiile de recurenţă ale funcţiilor Bessel şi care se verifică imediat :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^{\nu}J_{\nu}(z)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+2\nu}}{2^{2k+\nu}\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+2\nu)\,z^{2k+2\nu-1}}{2^{2k+\nu}\Gamma(k+1)\,(k+\nu)\Gamma(k+\nu)} =$$

$$= z^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+\nu-1}}{2^{2k+\nu-1}\,\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu)} = z^{\nu}J_{\nu-1}(z);$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^{-\nu}J_{\nu}(z)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k+\nu}\,\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 2k\,z^{2k-1}}{2^{2k+\nu}k\Gamma(k)\Gamma(k+\nu+1)} =$$

$$= z^{-\nu}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}z^{2m+\nu+1}}{2^{2m+\nu+1}\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+2)} = -z^{-\nu}J_{\nu+1}(z)$$

(s-a utilizat schimbarea indicilui de însumare scriind $k = m+1$).

Cu ajutorul relaţiilor de recurenţă se poate arăta că şi funcţiile Bessel de speţa I cu $\nu = n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, sînt liniar independente (teoria din cap. 11 ne asigură liniar independenţa soluţiilor J_{ν} şi $J_{-\nu}$ cu $2\nu \notin \mathbb{Z}$) şi exprimabile prin funcţii elementare; într-adevăr, deoarece $\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}2^{1-2k}\frac{\Gamma(2k)}{\Gamma(k)} = \sqrt{\pi}\frac{(2k)!}{2^{2k}k!}$, rezultă din (13.3) :

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{2^{2k}k!}{(2k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z,$$

iar a doua relaţie de recurenţă (13.6), pentru $\nu = \frac{1}{2}$, va conduce la $J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z$; aplicarea succesivă a relaţiilor (13.6) va conduce la determinarea tuturor funcţiilor Bessel de speţa I cu indicii $n+\frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. Aşadar, relaţia (13.4) va exprima orice funcţie Bessel cu indice $\nu \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ sau, deoarece odată cu ν în (13.4) apare şi $-\nu$, este suficient să presupunem $\nu \notin \mathbb{Z}_+$.

13.2. Funcţii Bessel de speţa II

Deoarece egalitatea (13.4) nu permite determinarea oricărei funcţii Bessel decît dacă $\nu \notin \mathbb{Z}_+$, să găsim a doua soluţie a ecuaţiei Bessel (13.1) liniar independentă de J_n, $n \in \mathbb{Z}_+$; pentru aceasta se poate proceda în mai multe moduri.

De exemplu, deoarece J_n verifică ecuaţia (13.1) pentru $\nu = n \in \mathbb{Z}_+$, a doua soluţie a acestei ecuaţii, liniar independentă de J_n se poate obţine prin transformarea $w \to J_n \cdot w$ iar un calcul elementar arată că

$$w(z) = C \cdot J_n(z) + DJ_n(z)\int_{z_0}^{z}\frac{\mathrm{d}t}{tJ_n^2(t)},$$

deci notînd $w_1(z) = J_n(z)$ şi $w_2(z) = J_n(z)\int_{z^0}^{z}\frac{\mathrm{d}t}{tJ_n^2(t)}$, $n \in \mathbb{Z}$, aceste soluţii vor fi evident liniar independente. Dar practic determinarea efectivă a funcţiei Bessel w_2 conduce la complicaţii, deoarece J_n este definit printr-o serie de puteri şi de aceea se introduc în calcul *funcţiile Bessel de speţa II* sau *funcţiile Neumann* definite prin

$$N_{\nu}(z) = J_{\nu}(z)\cdot\operatorname{ctg}(\pi\nu) - J_{-\nu}(z)\cdot\operatorname{cosec}(\pi\nu)$$

$$\left(= \frac{J_{\nu}(z)\cos(\pi\nu) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\pi\nu)}\right) \qquad (13.7)$$

Evident, dacă $\nu \notin \mathbb{Z}$, N_ν este funcţie Bessel, fiind o combinaţie liniară de funcţii Bessel de speţa I, şi pentru $\nu \in \mathbb{Z}$ vom pune, prin definiţie

$$N_n(z) = \lim_{\nu \to n} N_\nu(z), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{13.7'}$$

limita fiind calculată cu ajutorul regulei lui l'Hospital; aşadar

$$N_n(z) = \frac{1}{\pi}\left[\dot{J}_n(z) - (-1)^n \dot{J}_n(z)\right], \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{13.8}$$

unde $\dot{J} = \dfrac{\partial}{\partial \nu} J_\nu$ (derivatele în raport cu parametrul ν existînd în baza teoremei de derivabilitate a soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale care depind de parametri). Pentru a putea utiliza funcţia N_n, definită prin (13.8), ca o soluţie a ecuaţiei Bessel liniar independentă de J_n trebuie arătate două lucruri: funcţia Neumann este funcţie Bessel şi wronskianul $W = W[J_n, N_n]$ este nenul. Or, notînd

$$Lw = z^2 w'' + zw' + (z^2 - \nu^2)w,$$

rezultă

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(Lw) = z^2\left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)'' + z\left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)' + (z^2 - \nu^2)\frac{\partial w}{\partial \nu} - 2\nu w,$$

adică

$$L\left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right) = \frac{\partial}{\partial \nu}(Lw) + 2\nu w,$$

ceea ce arată că operatorii L şi $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ nu sînt permutabili, deci derivata în raport cu ν a unei funcţii Bessel nu este o funcţie Bessel; înlocuind w prin J_ν şi apoi prin $J_{-\nu}$, se va obţine prin trecere la limită ($\nu \to n$):

$$L(\dot{J}_n) = 2nJ_n, \quad L(\dot{J}_{-n}) = 2nJ_{-n},$$

deoarece $L(J_{\pm\nu}) = 0$, ceea ce înseamnă $L(N_n) = \dfrac{2n}{\pi}[J_n - (-1)^n J_{-n}] = 0$, utilizînd egalitatea (13.5).

Aşadar, funcţia definită prin (13.8) este o funcţie Bessel. Calculînd wronskianul $W[J_\nu, N_\nu]$ din (13.7), va rezulta

$$W[J_\nu, N_\nu] = -\frac{1}{\sin(\pi\nu)} W[J_\nu, J_{-\nu}]$$

şi deci rămîne de calculat

$$W[J_\nu, J_{-\nu}](z) = (J_\nu J'_{-\nu} - J_{-\nu} J'_\nu)(z) =$$

$$= \left[\frac{z^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} + \dots\right]\left[\frac{-\nu z^{-\nu-1}}{2^{-\nu}\,\Gamma(1-\nu)} + \dots\right] -$$

$$- \left[\frac{z^{-\nu}}{2^{-\nu}\,\Gamma(1-\nu)} + \dots\right]\left[\frac{\nu z^{\nu-1}}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} + \dots\right] =$$

$$= \frac{1}{z}\left[\frac{1}{\Gamma(1+\nu)\,\Gamma(-\nu)} - \frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)}\right] + \dots =$$

$$= -\frac{2\sin(\pi\nu)}{z} + \dots$$

deoarece

$$\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu) = \frac{\pi}{\sin(\pi\nu)}, \quad \Gamma(-\nu)\Gamma(1+\nu) = -\frac{\pi}{\sin(\pi\nu)},$$

termenii nescrişi avînd puteri nenegative ale lui z. Or, din formula lui Abel-Liouville rezultă $W[J_\nu, J_{-\nu}] = c \exp\left(-\int p\,dz\right) = \dfrac{c}{z}$, p fiind coeficientul lui w' din ecuaţia (13.1), după ce în prealabil se aduce ecuaţia la forma normală, deci $p(z) = \dfrac{1}{z}$. Rezultă neapărat

$$W[J_\nu, J_{-\nu}](z) = \frac{-2}{\pi z}\sin(\pi\nu)$$

(deci termenii nescrişi din dezvoltarea de mai sus a wronskianului se anulează), adică $W[J_\nu, N_\nu](z) = +\dfrac{2}{\pi z} \neq 0$; trecînd la limită pentru $\nu \to n$, se obţine $W[J_n, N_n](z) = \dfrac{2}{\pi z} \neq 0$.

Aşadar, cu aceste calcule putem scrie orice soluţie a ecuaţiei Bessel, pentru $\nu = n$, sub forma

$$w(z) = AJ_n(z) + BN_n(z). \tag{13.4'}$$

Expresia efectivă pentru N_ν se poate deduce din (13.7) dacă $\nu \notin \mathbb{Z}$, iar dacă $\nu \in \mathbb{Z}$, prin efectuarea calculelor indicate în (13.8); prin aranjarea convenabilă a termenilor, se poate obţine o expresie de forma (vezi şi exerciţiul 7)

$$N_n(z) = \frac{2}{\pi} J_n(z) \ln\left(\frac{z}{2}\right) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \Gamma(n)}{\Gamma(k+1)\,(1-n)_k} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} -$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (H_k + H_{n+k})}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}, \quad n \in \mathbb{Z}_+ \tag{13.8'}$$

în care $H_j = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{j}$, $j \in \mathbb{N}$, iar $(x)_k = x(x+1)\ldots$

$\ldots (x+k-1)$, $H_j = H(j)$.

Uneori se utilizează şi notaţia Y_n pentru N_n.

Evident, în locul expresiei (13.4) pentru orice funcţie Bessel de indice (parametru) neîntreg, se poate utiliza expresia $A \cdot J_\nu + B \cdot N_\nu$ (deoarece funcţiile Bessel J_ν şi N_ν sînt liniar independente) dar deoarece funcţia Bessel de speţa I, $J_{-\nu}$, are o expresie analitică mai simplă decît funcţia Bessel de speţa II, este preferabilă utilizarea expresiei (13.4).

13.3. Funcţiile Bessel de speţa III

Funcţiile Bessel de speţa III $H_\nu^{(1)}$, $H_\nu^{(2)}$ se definesc cu ajutorul egalităţilor următoare:

$$H_\nu^{(1)} = J_\nu + \mathrm{i}N_\nu, \quad H_\nu^{(2)} = J_\nu - \mathrm{i}N_\nu; \tag{13.9}$$

acestea se mai numesc şi *funcţiile Hankel*. Din (13.9) rezultă că dacă se cunosc funcţiile Hankel, atunci funcţiile Bessel de speţa I şi II se pot calcula cu ajutorul acestora:

$$J_\nu = \frac{1}{2}[H_\nu^{(1)} + H_\nu^{(2)}], \quad N_\nu = \frac{1}{2\mathrm{i}}[H_\nu^{(1)} - H_\nu^{(2)}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w = C_1 H_\nu^{(1)} + C_2 H_\nu^{(2)}. \tag{13.9'}$$

Este evident că funcţiile Hankel sînt liniar independente: este uşor de verificat egalitatea $W[H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)}] = -2\mathrm{i}W[J_\nu, N_\nu]$, deci $W[H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)}](z) = \frac{4\mathrm{i}}{\Pi z} \neq 0$; avantajul funcţiilor Bessel de speţa III constă în faptul că au o comportare simplă pentru $|z|$ mare şi pot fi exprimate prin integrale simple de contur.

Atît funcţiile Bessel de speţa I cît şi funcţiile lui Hankel verifică aceleaşi relaţii de recurenţă (13.6) ca şi funcţiile Bessel de speţa I, deoarece relaţiile (13.6) sînt liniare, deci rămîn valabile atît pentru combinaţii liniare de funcţii Bessel de speţa I cît şi după trecerea la limită.

13.4. Alte funcţii Bessel importante

Dacă în ecuaţia Bessel se scrie $\mathrm{i}x$ în loc de variabila independentă z, se obţine ecuaţia diferenţială

$$x^2 \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} + x \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} - (\nu^2 + x^2) w = 0, \tag{13.10}$$

pentru care o soluţie particulară va fi funcţia

$$J_\nu(\mathrm{i}x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{\mathrm{i}x}{2}\right)^{2k+\nu} = \mathrm{i}^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}$$

care permite definirea funcţiei I_n, punîndu-se $I_n(x) = \mathrm{i}^{-\nu} J_\nu(\mathrm{i}x)$ şi deci

$$I_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \tag{13.11}$$

Această funcţie se numeşte *funcţia Bessel modificată de speţa* I (sau *funcţia Bessel de prima speţă şi de argument imaginar*); dacă $\nu = n \in \mathbb{Z}$, cu ajutorul egalităţii (13.5) se obţine

$$I_{-n}(x) = \mathrm{i}^n J_{-n}(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}^n \cdot (-1)^n J_n(\mathrm{i}x) = (-\mathrm{i})^n J_n(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}^{-n} J_n(\mathrm{i}x) = I_n(x),$$

deci $I_{-n} = I_n$, $n \in \mathbb{Z}$. Se verifică uşor relaţiile de recurenţă

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-\nu}I_\nu(x)] = x^{-\nu}I_{\nu+1}(x), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{\nu}I_\nu(x)] = x^{\nu}I_{\nu-1}(x)$$

pe care le satisfac funcţiile I_ν.

Dacă $\nu \notin \mathbb{Z}$, atunci $I_{-\nu}$ este a doua soluţie a ecuaţiei (13.10), liniar independentă de I_ν iar dacă $\nu \in \mathbb{Z}$, funcţia $I_{-\nu}$ trebuie înlocuită cu funcţia $N_\nu(ix)$ sau cu funcţii care diferă oarecum de aceasta; astfel, se obişnuieşte să se utilizeze funcţia *Bessel modificată de speţa* II (numită şi *funcţia Macdonald)*:

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2\sin(\pi\nu)}[I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)], \ \nu \in \mathbb{Z}, \qquad (13.11')$$

iar $K_n = \lim_{\nu \to n} K_\nu$, dacă $n \in \mathbb{Z}$, limita fiind calculată cu ajutorul regulii lui l'Hospital; deci

$$K_n(x) = \frac{(-1)^n}{2}[\dot{I}_{-n}(x) - \dot{I}_n(x)] = (-1)^{n+1} I_n(x) \ln\left(\frac{x}{2}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} +$$
$$+ \frac{(-1)^n}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{H(k) - H(n+k)}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

O altă funcţie Bessel este *funcţia lui Dougall*

$$G_\nu(x) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}\nu\pi}{2}\right) K_\nu\left[x\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\right)\right] =$$
$$= \frac{\pi}{2\sin(\pi\nu)}[J_{-\nu}(x) - \exp(-\mathrm{i}\nu\pi)\cdot J_\nu(x)]. \qquad (13.12)$$

Dacă $\nu \in \mathbb{Z}$, se poate ajunge la relaţiile

$$G_n(x) = -N_n(x) + J_n(x)\left(\ln 2 - \gamma - \frac{\mathrm{i}\pi}{2}\right) =$$

$$= J_n(x)\left[-\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \gamma + \frac{\mathrm{i}\pi}{2}\right] + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(n-k)}{\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k[H(k) + H(k+n)]}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n},$$

unde $\gamma = 0{,}57721\ldots = \ln 1{,}78107\ldots$ este constanta lui Euler; de asemenea, $K_\nu(x) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}\nu\pi}{2}\right)G_\nu(\mathrm{i}x)$.

În teoria curenţilor electrici variabili apare ecuaţia diferenţială

$$y'' + \frac{1}{z}y' - \mathrm{i}y = 0, \qquad (13.13)$$

care se poate obţine din ecuaţia Bessel modificată (13.10) pentru $\nu = 0$ şi $x = z\sqrt{\mathrm{i}}$; deci cele două soluţii liniar independente ale acestei ecuaţii vor fi funcţiile $I_0(z\sqrt{\mathrm{i}})$ şi $K_0(z\sqrt{\mathrm{i}})$. Se obişnuieşte să se introducă funcţiile ber_ν şi bei_ν (*funcţiile Kelvin*) punînd

$$\mathrm{ber}_\nu(x) = \mathrm{Re}\, I_\nu(x\sqrt{\mathrm{i}}), \quad \mathrm{bei}_\nu(x) = \mathrm{Im}\, I_\nu(x\sqrt{\mathrm{i}})$$

deci

$$I_\nu(x\sqrt{\mathrm{i}}) = \mathrm{ber}_\nu(x) + \mathrm{i}\,\mathrm{bei}_\nu(x) \qquad (13.14)$$

şi prin urmare, în particular,

$$\mathrm{ber}_0(x) = 1 - \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} + \frac{x^8}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2} - \ldots,$$

$$\mathrm{bei}_0(x) = \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \frac{x^{10}}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2\cdot 10^2} - \ldots \qquad (13.14')$$

În mod analog se definesc funcţiile lui Kelvin ker_ν şi kei_ν:

$$\mathrm{ker}_\nu(x) = \mathrm{Re}\, K_\nu(x\sqrt{\mathrm{i}}), \quad \mathrm{kei}_\nu(x) = \mathrm{Im}\, K_\nu(x\sqrt{\mathrm{i}})$$

deci

$$K_\nu(x\sqrt{\mathrm{i}}) = \mathrm{ker}_\nu(x) + \mathrm{i}\,\mathrm{kei}_\nu(x) \qquad (13.15)$$

iar (în particular)

$$\ker_0(x) = (\ln 2 - \ln x - \gamma)\ \mathrm{ber}_0(x) + \frac{\pi}{4}\,\mathrm{bei}_0(x) - \frac{H(2)}{2^2\cdot 4^2}x^4 + \frac{H(4)}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2}x^8 + \dots$$

$$\mathrm{kei}_0(x) = (\ln 2 - \ln x - \gamma)\,\mathrm{bei}_0(x) - \frac{\pi}{4}\,\mathrm{ber}_0(x) + \frac{x^2}{2^2} - \frac{H(3)}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}x^6 + \dots$$

şi se pot verifica uşor egalităţile:

$$\int_0^x t\,\mathrm{ber}_0(t)\,dt = x\,\mathrm{bei}_0'(x),\quad \int_0^x t\,\mathrm{bei}_0(t)\,dt = -x\,\mathrm{ber}_0'(x),$$

$$\int_0^x t\,\ker_0(t)\,dt = x\,\mathrm{kei}_0'(x),\quad \int_0^x t\,\mathrm{kei}_0(t)\,dt = -x\,\ker_0(x).$$

Prin *funcţii Bessel normate*, notate P_ν, se înţeleg funcţiile întregi definite prin egalitatea

$$P_\nu(z) = \Gamma(\nu+1)\left(\frac{2}{z}\right)^\nu J_\nu(z),\ \text{deci}\ P_\nu(0) = 1. \qquad (13.16)$$

Rezultă dezvoltarea în serie

$$P_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(\nu+1)_k}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} = 1 - \frac{1}{1!\,(\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!\,(\nu+1)(\nu+2)}\left(\frac{z}{2}\right)^4 + \dots$$

şi se verifică faptul că funcţia Bessel normată P_ν este o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale

$$zw'' + (2\nu+1)w' + zw = 0. \qquad (13.16')$$

În fine, o altă categorie importantă de funcţii Bessel o constituie *funcţiile lui Airy*, care sînt legate de ecuaţia diferenţială

$$y'' + axy = 0, \qquad (13.17)$$

unde a este un parametru dat (real sau complex). Efectuînd transformările $y = \sqrt{x}\cdot w$, $x = a^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{3}{2}z\right)^{\frac{2}{3}}$, în ecuaţia (13.17) va apărea ecuaţia Bessel $z^2w'' + zw' + \left(z^2 - \frac{1}{9}\right)w = 0$, pentru care parametrul ν este $\pm\frac{1}{3}$. Aşadar, orice soluţie a ecuaţiei (13.17) se va obţine prin particularizarea constantelor A şi B din egalitatea

$$y = \sqrt{x}\left[A\cdot J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{a\,x^3}\right) + B\cdot J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{a\,x^3}\right)\right]. \qquad (13.18)$$

Uneori însă în locul soluţiilor particulare $\sqrt{x}J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{a\,x^3}\right)$, $\sqrt{x}J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{a\,x^3}\right)$, în special dacă $a = \frac{1}{3}$, se utilizează *funcţia Airy* A_1, definită prin relaţia

$$A_1(x) = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{x}{3}}\left\{J_{-\frac{1}{3}}\left[2\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right] + J_{\frac{1}{3}}\left[2\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\right\}, \qquad (13.18')$$

precum şi *funcţia Airy asociată* A_2 definită prin egalitatea

$$A_2(x) = \frac{\pi}{3}\sqrt{x}\left\{J_{-\frac{1}{3}}\left[2\left(\frac{x}{3}\right)^{3/2}\right] - J_{\frac{1}{3}}\left[2\left(\frac{x}{3}\right)^{3/2}\right]\right\}, \qquad (13.18'')$$

care, spre deosebire de soluţiile iniţiale, vor fi soluţii uniforme ale ecuaţiei $y'' + \frac{1}{3}xy = 0$, soluţia generală a acestei ecuaţii fiind

$$y = C_1A_1 + C_2A_2. \qquad (13.18''')$$

13.5. Reprezentări integrale pentru funcţii Bessel

Dacă în ecuaţia Bessel se efectuează transformarea

$$w = z^{\nu} y, \tag{13.19}$$

se obţine ecuaţia diferenţială (13.16′) (dar cu y în loc de w); utilizînd cele expuse în cap. 8, pentru ecuaţia (13.16′) se pot căuta soluţii particulare sub forma integrală

$$w(z) = \int_C \exp(-zt)\,\varphi(t)\,dt,$$

în care C este un contur de integrare (independent de z) din planul complex t şi φ o funcţie analitică pe C, iar atît funcţia φ cît şi conturul C se determină convenabil astfel încît să se verifice ecuaţia (13.16′). Integrînd prin părţi, putem scrie

$$zw(z) = -\exp(-zt)\varphi(t)\Big|_C + \int_C \exp(-zt)\varphi'(t)dt,$$

$$zw''(z) = z\int_C t^2 \exp(-zt)\,\varphi(t)\,dt = -\exp(-zt)t^2\varphi(t)\Big|_C +$$

$$+\int_C \exp(-zt)\,[t^2\varphi'(t) + 2t\varphi(t)]\,dt$$

iar prin înlocuire în ecuaţia (13.16′) se va obţine egalitatea

$$\int_C \exp(-zt)\,[(1+t^2)\varphi'(t) - (2\nu-1)t\varphi(t)]dt -$$

$$-\exp(-zt)\,(1+t^2)\varphi(t)\Big|_C = 0,$$

care va fi verificată, dacă, în particular, φ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale $(1+t^2)\varphi' = (2\nu-1)t\varphi$, deci dacă $\varphi(t) = (1+t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}$ iar conturul de integrare este ales astfel încît $\exp(-zt)\,(1+t^2)\varphi(t)\Big|_C = \exp(-zt)\,(1+t^2)^{\nu+\frac{1}{2}}\Big|_C = 0$.

În acest mod se poate considera demonstrat rezultatul următor [ţinînd seama de (13.19)]:

Teorema 13.1. *Dacă în planul complex t se determină conturul de integrare C astfel încît*

$$(1+t^2)^{\nu+\frac{1}{2}} \exp(-zt)\Big|_C = 0, \tag{13.20}$$

atunci ecuaţia lui Bessel admite soluţii particulare de forma

$$w(z) = Az^{\nu}\int_C (1+t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \exp(-zt)\,dt \tag{13.21}$$

A fiind independent de z (dar eventual poate depinde de ν).

În particular, alegînd $A = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\,2^{\nu}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}$ şi C drept segmentul care uneşte punctele $-i$ şi $+i$ (din planul complex t), punînd $t = -ix$, se obţine egalitatea

$$J_{\nu}(z) = \frac{z^{\nu}}{\sqrt{\pi}\,2^{\nu}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{+1} e^{ixz}\,(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dx, \tag{13.22}$$

valabilă pentru $\mathrm{Re}\,\nu > -\dfrac{1}{2}$, numită *reprezentarea integrală Poisson* pentru funcţia Bessel J_{ν}.

Într-adevăr, dacă C este segmentul în cauză iar $\mathrm{Re}\,\nu > -\dfrac{1}{2}$, va rezulta

$$(1+t^2)^{\nu+\frac{1}{2}} \exp(-zt)\Big|_C = (1+t^2)^{\nu+\frac{1}{2}} \exp(-zt)\Big|_{t=-i}^{t=+i} = 0$$

şi deci condiţia (13.20) este satisfăcută; apoi, cu $t = -ix$, avem, cu alegerea precizată pentru conturul C:

$$\int_C (1+t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \exp(-zt)\,dt = \int_{-i}^{+i} (1+t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \exp(zt)\,dt =$$

$$= \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \exp(ixz)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!}\int_{-1}^{+1} x^n\,(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dx$$

şi deoarece pentru n impar integrala este nulă (integrandul fiind în acest caz o funcţie impară), în ultima sumă trebuie să punem $n = 2k$, ceea ce înseamnă

$$\int_C (1+t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \exp(-zt)\,dt = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} \int_0^1 x^{2k}(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k+\nu+1)} =$$

$$= \sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{k!\,2^{2k}\Gamma(k+\nu+1)},$$

deoarece $\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,2^{-2k}\,\frac{(2k)!}{k!}$; înmulţind ultimul rezultat cu $\frac{z^\nu}{2^\nu \pi\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}$, se va obţine exact egalitatea (13.22). Deoarece

$$\int_{-1}^{0} \exp(ixz)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dx = \int_0^1 \exp(-ixz)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dx,$$

din identitatea (13.22) va rezulta o nouă reprezentare integrală pentru funcţiile Bessel J_ν, cu $\mathrm{Re}\,\nu > -\frac{1}{2}$:

$$J_\nu(z) = \frac{2z^\nu}{\sqrt{\pi}2^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos(xz)\,dx, \qquad (13.22')$$

numită de asemenea *formula lui Poisson* pentru J_ν.

Din (13.22) sau (13.22'), în baza relaţiei $I_n(z) = i^{-\nu}J_\nu(iz) = \exp\left(-\frac{\pi}{2}\nu\right) J_\nu(iz)$, care defineşte funcţia Bessel modificată

(13.11), rezultă imediat următoarele reprezentări integrale:

$$I_\nu(z) = \frac{z^\nu}{\sqrt{\pi}\,2^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{+1} \exp(-xz)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{2z^\nu}{\sqrt{\pi}2^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \operatorname{ch}(xz)\,dx.$$

Reluînd condiţia (13.22), aceasta este evident verificată dacă, de exemplu, se înlocuieşte t prin $-ix$ şi se consideră contururi cu o

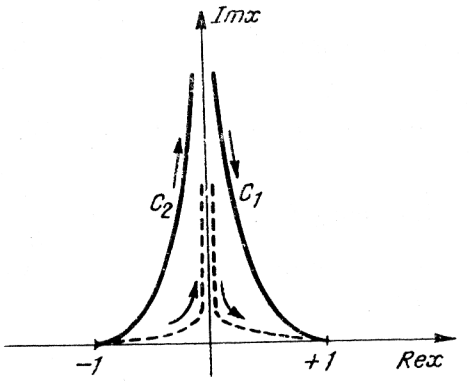

Fig. 13.1

extremitate în $x = 1$ (sau $x = -1$) şi cu cealaltă extremitate la infinit [în aşa fel încît să se anuleze funcţia $\exp(+ixz)$ pentru $x = \infty$]; astfel de contururi sînt date în fig. 13. 1. Vom pune, prin definiţie

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{z^\nu}{\sqrt{\pi}2^{\nu+1}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_{C_1} \exp(ixz)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dx,$$

$$\mathrm{Re}\,\nu > -\frac{1}{2}, \qquad (13.23)$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \frac{z^\nu}{\sqrt{\pi}2^{\nu+1}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_{C_2} \exp(ixz)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dx.$$

Evident, dacă z este real şi pozitiv cînd $x \to \infty$ de-a lungul axei imaginare pozitive, avem $\exp(ixz) = \exp(-tz) \to 0$ cînd $t \uparrow \infty$, notînd $x = it$.

Definiţiile (13.23) se pot justifica imediat, deoarece contururile C_1 şi C_2 se pot deforma în contururile punctate iar deoarece axa imaginară pozitivă este parcursă de două ori, însă în sensuri opuse, prin însumare, se va obţine

$$H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(x) = \frac{z^\nu}{\sqrt{\pi}\, 2^{\nu+1}\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{+1} \exp(ixz)\,(1 - x^2)^{\nu - \frac{1}{2}}\, dx =$$

$$= 2J_\nu(z),$$

dacă se ţine seama de formulele (13.22) şi (13.9′).

În sfîrşit, vom arăta că pentru funcţia Airy A_1 definită prin (13.18′) este valabilă următoarea reprezentare integrală:

$$A_1(x) = \int_0^\infty \cos(t^3 - tx)\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(it^3 - itx)\, dt \qquad (13.24)$$

dacă parametrul din ecuaţia (13.17) este $a = \frac{1}{3}$.

Într-adevăr, luînd în consideraţie funcţia de variabila complexă t, $f(t) = \exp(it^3 - itx)$, punînd $t = r\exp(i\theta)$, rezultă

$$|f(t)| = \exp[\mathrm{Re}\ (it^3 - itx)] = \exp\left[r^3\cos\left(3\theta + \frac{\pi}{2}\right) - rx\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

şi deci $f(t)$ tinde exponenţial la zero dacă $r = |t| \to \infty$ iar θ este fixat, astfel încît $\cos\left(3\theta + \frac{\pi}{2}\right) < 0$, deci dacă θ este cuprins în intervalul $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$ sau în intervalul $\left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$; prin urmare, în baza teoremei lui Cauchy, integrala din (13.24) nu-şi va modifica valoarea dacă integrarea se realizează pe un contur $C = D_1 \cup D_2$, unde D_1 este o semidreaptă ce pleacă din origine, avînd panta $\theta_1 \in \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$ iar D_2 o semidreaptă care pleacă tot din origine dar are panta $\theta_2 \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[$.

Vom avea

$$A_1''(z) = \frac{1}{2}\int_C (-it)^2 f(t)\, dt = -\frac{1}{2}\int_C t^2 f(t)\, dt$$

şi prin urmare

$$A_1'' + \frac{1}{3}xA_1 = -\frac{1}{6}\int_C (3t^2 - x) f(t)\, dt = -\frac{1}{6i} f(t)\Big|_C = 0$$

(deoarece integrarea se poate efectua prin schimbarea de variabilă $t^3 - tx \to t$), ceea ce înseamnă că funcţia (13.24) verifică ecuaţia (13.17) cu $a = \frac{1}{3}$. Cum $A_1(0) = \frac{\sqrt{3}}{6}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$, $A_1'(0) = 0$ se verifică prin calcul că atît funcţia A_1 definită prin (13.18′) cît şi funcţia definită prin relaţia (13.24) verifică aceleaşi condiţii iniţiale, deci vor coincide.

Exerciţii şi completări

1°. Orice ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea de forma $x^2y'' + axy' + (b + cx^d)y = 0$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, se poate integra cu ajutorul funcţiilor Bessel.

Indicaţie. Se scrie $x = kz^n$, $y = z^m w$ şi dacă se determină k, n, m astfel încît $nd = 2$, $cn^2k^d = 1$, $2m + (a - 1)n = 0$, va rezulta o ecuaţie Bessel cu $\nu^2 = m^2 - bn^2$.

2°. Să se arate că relaţiile de recurenţă (13.6) sînt verificate numai de funcţiile Bessel.

Indicaţie. Dacă $(z^\nu w_\nu)' = z^\nu w_{\nu-1}$, $(z^{-\nu}w_\nu)' = -z^{-\nu}w_{\nu+1}$, se scrie a doua identitate cu $\nu - 1$ în loc de ν şi se elimină $w_{\nu-1}$; utilizîndu-se prima identitate, se obţine ecuaţia Bessel.

3°. Cu ajutorul transformărilor $w \to z^\nu \exp(-iz)w$, $z \to \frac{-i}{2}z$ ecuaţia Bessel se reduce la ecuaţia hipergeometrică confluentă.

Indicaţie. Se obţine ecuaţia $zw'' + (1 + 2\nu - z)w' - \left(\frac{1}{2} + \nu\right)w = 0$, deci $c = 1 + 2\nu$, $a = \nu + \frac{1}{2}$; o soluţie particulară a ecuaţiei Bessel va fi deci funcţia $z^\nu \exp(-ix)\,{}_1F_1\left(\nu + \frac{1}{2};\ 2\nu + 1;\ 2iz\right)$.

4°. Să se deducă egalitatea $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)t^n = \exp\left[\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right]$.

Indicație.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)t^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{tz}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \sum_{n=-m}^{\infty} \frac{\left(\frac{tz}{2}\right)^n}{(n+k)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\left(\frac{tz}{2}\right)^{-k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\left(\frac{tz}{2}\right)^j = \exp\left(\frac{tz}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{z}{2t}\right)^k =$$

$$= \exp\left(\frac{tz}{2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{z}{2t}\right).$$

5°. Să se integreze ecuațiile diferențiale $xy'' + y = 0$, $x^2y'' - 2xy' + 4(x^4 - 1)y = 0$, $4xy'' + 2y' + y = 0$.

Indicație. Se utilizează exercițiul 1 și se obțin soluțiile corespunzătoare:

$$A\sqrt{x}\,J_1(2\sqrt{x}) + B\sqrt{x}\,N_1(2\sqrt{x}),\ A\,x^{3/2}\,J_{\frac{5}{4}}(x^2) + Bx^{3/2}J_{-\frac{5}{4}}(x^2),$$

$$A\,x^{1/4}J_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{x}) + Bx^{1/4}J_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x}).$$

6°. Utilizînd exercițiul 4, să se deducă relațiile

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\exp(int) = \exp(ix\sin t),$$

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin t - nt)\,dt.$$

Indicație. Prima egalitate se obține punînd $\exp(it)$ în seria corespunzătoare, iar a doua este o consecință a teoriei seriilor trigonometrice, J_n fiind coeficientul lui $\exp(int)$.

7°. Să se efectueze calculele care conduc la expresia (13.8′) pentru funcția Neumann N_n.

Indicație

$$J_{-\nu}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\nu} \frac{1}{k!\,\Gamma(1-\nu+k)} +$$

$$+ \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\nu} \frac{1}{k!\Gamma(1-\nu+k)} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\nu} \frac{\sin(\pi\nu)\Gamma(\nu-k)}{\pi k!} +$$

$$+ \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\nu}}{k!\,\Gamma(1-\nu+k)},$$

deoarece

$$\Gamma(\nu-k)\ \Gamma(1-\nu+k) = (-1)^k \frac{\pi}{\sin(\pi\nu)};\ J_{-\nu}(z) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\pi k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\nu} \Gamma(\nu-k)\left[\left(\ln\frac{z}{2} + \psi(\nu-k-1)\right)\sin(\pi\nu) + \pi\cos(\pi\nu)\right] -$$

$$- \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\nu} \frac{1}{\Gamma(1+k-\nu)}\left[\ln\frac{z}{2} - \psi(k-\nu)\right],$$

unde $\psi = \frac{\Gamma'}{\Gamma}$, $\psi(n) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \gamma = H_n - \gamma$; calculînd $J_{+\nu}$ și utilizînd definiția lui N_n se găsește expresia (13.8′).

7°. Să se deducă dezvoltările

$\cos(z\sin t) = J_0(z) + 2J_2(z)\cos 2t + \ldots + 2J_{2k}(z)\cos(2kt) + \ldots$

$\sin(z\sin t) = 2J_1(z)\sin t + 2J_3(z)\sin 3t + \ldots + 2J_{2k+1}(z)\sin(2k+1)t + \ldots$

Indicație. În exercițiul 4 cu schimbarea $t \to \exp(it)$ se separă părțile reale și imaginare).

9°. Să se deducă egalitatea $J_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(z) = 1$, $z \in \mathbb{C}$, din care să se deducă inegalitățile $|J_0(z)| \leqslant 1$, $|J_n(z)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, $z \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Indicație. Se înmulțesc dezvoltările funcțiilor

$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right],\ \exp\left[-\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right],$$

conform cu exercițiul 4 și se ia în considerație termenul independent de t.

10°. Să se arate că $J_3 + 3J_0' + 4J_0''' = 0$.

Indicație. Se utilizează relațiile de recurență.

11°. Să se deducă egalitatea

$$J_\nu(z)J_{1-\nu}(z) + J_{-\nu}(z)J_{\nu-1}(z) = \frac{2\sin(\pi\nu)}{\pi z}.$$

Indicație. Se utilizează wronskianul funcțiilor Bessel J_ν, $J_{-\nu}$ și relațiile de recurență.

CAPITOLUL 14

Polinoame ortogonale

14.1. Şiruri liniar independente, şiruri ortogonale, şiruri ortonormale

Fie H un spaţiu prehilbertian (vezi cap. 3) în care produsul scalar s-a notat (f, g), $f, g \in H$ şi fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir din H. Acest şir se numeşte *liniar independent*, dacă orice secţiune finită a sa este liniar independentă, adică dacă $f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots, f_{n_k}$ sînt elemente oarecare distincte ale şirului considerat, atunci dacă $c_1 f_{n_1} + c_2 f_{n_2} + \ldots + c_k f_{n_k} = 0$, neapărat $c_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, k$; în caz contrar şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte *liniar dependent* (deci şirul este liniar dependent dacă există cel puţin o secţiune finită a acestuia liniar dependentă).

Şirul $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din H se numeşte *ortogonal* dacă pentru orice două elemente distincte ale şirului dat se verifică relaţia de ortogonalitate, adică

$$(g_k, g_j) = 0, \text{ dacă } j \neq k,\ j,\ k \in \mathbb{N}. \tag{14.1}$$

Şirul $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din H se numeşte *ortonormal* (sau *ortonormat*) dacă

$$(h_k, h_j) = \delta_{kj},\ j,\ k \in \mathbb{N}, \tag{14.2}$$

unde $\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases}$ este simbolul lui Kronecker.

Teorema 14.1. a) *Orice şir ortogonal care nu conţine elementul nul din H este liniar independent;*

b) *orice şir ortonormal este ortogonal iar orice şir ortogonal care nu conţine elementul nul din H poate fi transformat într-un şir ortonormal;*

c) *orice şir liniar independent poate fi transformat într-un şir ortonormal.*

Dacă $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şirul ortogonal din H astfel încît $\|g_n\| > 0$, $n \in \mathbb{N}$, iar $c_1 g_{n_1} + c_2 g_{n_1} + \ldots + c_k g_{n_k} = 0$, de exemplu $c_1 \neq 0$, înmulţind scalar cu g_{n1}, se obţine egalitatea $c_1 \| g_{n_1} \|^2 = 0$, deci $c_1 = 0$; rezultă succesiv $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$ şi a) este demonstrat.

Dacă $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir ortonormal din H, din (14.2) rezultă $(h_k, h_j) = 0$, $j \neq k$, iar dacă $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir ortogonal din H cu $\|g_n\| > 0$, $n \in \mathbb{N}$, atunci notînd $h_k = \dfrac{1}{\|g_k\|} g_k$, rezultă

$$(h_k, h_j) = \frac{1}{\|g_k\|\ \|g_j\|} (g_k, g_j)$$

şi deci $(h_k, h_j) = 0$ pentru $k \neq j$ iar $(h_k, h_k) = \dfrac{1}{\|g_k\|^2} (g_k, g_k) = 1$, adică şirul $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ este ortonormal, iar afirmaţia b) este justificată.

În sfîrşit, pentru a demonstra afirmaţia c) vom face ipoteza că şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este liniar independent. Dacă s-a reuşit să se determine elementele $h_1, h_2, \ldots, h_n$ ale şirului ortonormal $(h_j)_{j\in\mathbb{N}}$ astfel încît h_j este o combinaţie liniară a elementelor $f_1, f_2, \ldots, f_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ (elemente ale şirului dat iniţial), atunci punînd $g_{n+1} = f_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} (f_{n+1}, h_j)\, h_j$, rezultă $(g_{n+1}, h_k) = 0$ pentru $k = 1, 2, \ldots, n$ şi cum g_{n+1} este o combinaţie liniară a elementelor $f_{n+1}, h_n, \ldots, h_1$, deci o combinaţie liniară a elementelor $f_{n+1}, f_n, \ldots, f_1$, neapărat $g_{n-1} \neq 0$ (deci $\|g_{n+1}\| > 0$) şi atunci al $(n+1)$-lea termen al şirului ortonormal căutat va fi $f_{n+1} = \dfrac{1}{\|g_{n+1}\|} g_{n+1}$. ⌟

În cazul de faţă ne interesează în special spaţiul funcţiilor continue $C^0(J)$, J fiind un interval de lungime oarecare al mulţimii $\mathbb{R}$, cu valori reale sau complexe, care devine un spaţiu prehilbertian H_ρ dacă se introduce *produsul scalar cu pondere*, notat $(f, g)_\rho$ şi definit prin relaţia

$$(f, g)_\rho = \int_J \rho(x)\, f(x)\, \overline{g}(x)\, dx,\ f, g \in C^0(J), \tag{14.3}$$

unde prin *pondere* se înțelege de obicei o funcție continuă pe J cu valori reale nenegative, care nu se modifică cînd f și g parcurg mulțimea $C^0(J)$; este posibil ca f să fie continuă pe porțiuni pe J iar dacă $J =]a, b[$, $a, b \in \mathbb{R}$ sau dacă $J =]a, +\infty[$ $(=]-\infty, b[)$ este posibil ca în punctele a și b sau pentru $x = a$ (respectiv pentru $x = b$) ρ să admită discontinuități integrabile.

În spațiul prehilbertian $H_\rho = C^0(J)$ șirul puterilor lui x, adică șirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu $f_n = x^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, este un șir liniar independent deoarece combinația liniară formată cu orice secțiune finită a șirului $(x^{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ va fi un polinom de forma $C_1x^{n_1-1} + \ldots + C_kx^{n_k-1}$ care va fi elementul nul din H_ρ numai dacă $C_1 = \ldots = C_k = 0$ [în spațiul $C^0(J)$ elementul nul $f = 0$ este funcția egală cu zero pentru orice $x \in J$]. Aplicînd deci punctul c) al teoremei anterioare, acest șir se poate transforma într-un șir $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ ortonormal, cu ajutorul unor combinații liniare ale elementului șirului considerat; rezultă că elementele șirului $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ vor fi *polinoame* și vom presupune că h_n are gradul n: $\deg h_n = n$. Așadar elementele șirului $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ vor verifica relațiile (14.2) în care produsul scalar este definit prin (14.3). Evident elementele șirului $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ vor depinde atît de intervalul J cît și de ponderea ρ care definește produsul scalar (14.3).

14.2. Polinoame ortogonale: proprietăți generale

Vom nota prin $(Q_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ un șir de polinoame ortogonale; nu este necesar să se presupună șirul format din polinoame normate deoarece în practică nu întotdeauna este importantă condiția $\|Q_n\|_\rho^2 = (Q_n, Q_n)_\rho = 1$, care este înlocuită, de la caz la caz, printr-o altă condiție (de exemplu, printr-o condiție de forma $Q_n(\alpha) = \beta$, $\alpha \in \bar{J}$, $\beta \in \mathbb{C}$, care poartă de asemenea denumirea de *condiția de normare* a șirului în cauză).

Așadar, șirul de polinoame $(Q_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ verifică, pentru orice $n, m \in \mathbb{Z}_+$, relația de ortogonalitate

$$(Q_n, Q_m)_\rho = \int_J \rho(x)\, Q_n(x)\, \overline{Q_m(x)}\, dx = 0, \text{ dacă } m \neq n. \tag{14.4}$$

Vom presupune polinomul Q_n de forma

$$Q_n(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x + b_0,\ b_j \in \mathbb{C},\quad j = 0, 1, \ldots, n,\ b_n \neq 0. \tag{14.5}$$

Teorema 14.2. *Pentru orice șir $(Q_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ de polinoame ortogonale sînt valabile propozițiile următoare:*

a) *orice polinom R_n, $\deg R_n = n$, este o combinație liniară a polinoamelor $Q_0, \ldots, Q_n$;*

b) *orice polinom Q_n din șirul considerat este ortogonal pe orice polinom R_m dacă $\deg R_m < n$;*

c) *dacă polinomul R_n, $\deg R_n = n$, verifică relațiile*

$$(R_n, x^k)_\rho = 0,\ k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{14.6}$$

atunci $R_n = a_nQ_n$, $a_n \in \mathbb{C}$;

d) *între trei polinoame ortogonale consecutive există o relație de recurență;*

e) *ecuația algebrică $Q_n(x) = 0$, $n \geqslant 1$, are toți coeficienții reali dacă $Q_0 \in \mathbb{R}$ și admite n rădăcini simple în J.*

Propoziția a) va fi demonstrată dacă are loc egalitatea

$$R_n = a_0Q_0 + a_1Q_1 + \ldots + a_nQ_n \tag{14.7}$$

care se poate demonstra prin inducție: pentru $n = 0$, avem $R_0 = \frac{R_0}{b_0} \cdot b_0$, dacă $Q_0(x) = b_0 \neq 0$; presupunînd egalitatea (14.7) valabilă, dacă $\deg R_{n+1} = (n+1)$, vom putea scrie

$$R_{n+1}(x) = C_{n+1}x^{n+1} + C_nx^n + \ldots + C_1x + C_0 =$$

$$= \frac{C_{n+1}}{b_{n+1}}(b_{n+1}x^{n+1} + b_nx^n + \ldots + b_0) + R_n(x) =$$

$$= \frac{C_{n+1}}{b_{n+1}}\, Q_{n+1}(x) + R_n(x)$$

dacă

$$\frac{b_n}{b_{n+1}}x^n + \ldots + \frac{b_0}{b_{n+1}} + R_n(x) = C_nx^n + \ldots + C_0.$$

Cum $b_{n+1} \neq 0$, se obține o relație de forma (14.7) dar cu $n+1$ în loc de n. Din identitatea (14.7), prin înmulțire scalară cu Q_k, deoarece $(Q_j, Q_k)_\rho = 0$, $j \neq k$, va rezulta egalitatea $(R_n, Q_k)_\rho = a_k(Q_k, Q_k)_\rho$, $k = 0, 1, \ldots, m$, din care se poate găsi expresia lui a_k:

$$a_k = \frac{(R_n, Q_k)_\rho}{\|Q_k\|_\rho^2}. \tag{14.7'}$$

Afirmația b) este evidentă: dacă $m < n$, avem $(R_m, Q_n)_\rho =$

$= \left(\sum_{k=0}^{m} a_k Q_k, Q_n\right) = \sum_{k=0}^{m} a_k (Q_k, Q_n) = 0$, dacă se utilizează (14.7) și (14.4), ținînd seama că $n \neq k$.

Pentru a justifica afirmația c), vom face mai întîi observația că din (14.6) rezultă relația $(R_n, Q_j)_\rho = 0$, dacă $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, deoarece

$$(R_n, Q_j)_\rho = \left(R_n, \sum_{k=0}^{j} b_k x^k\right)_\rho = \sum_{k=0}^{j} \bar{b}_k (R_n, x^k)_\rho = 0, \qquad k \leqslant j \leqslant n-1$$

Utilizînd descompunerea (14.7) cu coeficienții a_k determinați prin (14.7'), va rezulta $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$, adică $R_n = a_n Q_n$.

Deoarece $x Q_n(x)$ este un polinom de grad $n+1$, în baza lui (14.7) se poate scrie $xQ_n(x) = a_{n+1}Q_{n+1}(x) + a_n Q_n(x) + a_{n-1}Q_{n-1}(x) + \ldots$ unde, conform cu (14.7'), coeficienții a_k vor fi nuli, pentru $k = n-2, n-3, \ldots, 1, 0$, deoarece $(xQ_n, Q_k)_\rho = (Q_n, xQ_k)_\rho = (Q_n, R_{k+1})_\rho = 0$ pentru $k+1 < n$, ceea ce face ca termenii nescriși din descompunerea polinomului $xQ_n(x)$ să fie nuli; din această descompunere rezultă egalitatea

$$a_{n-1} Q_{n-1}(x) + (a_n - x) Q_n(x) + a_{n+1} Q_{n+1}(x) = 0,$$

care reprezintă relația de recurență dorită în care a_n, a_{n-1}, a_{n+1} se determină fie cu ajutorul lui (14.7'), în care $R_n(x) = xQ_n(x)$, $k = n-1$, n, $n+1$, fie prin identificarea coeficienților termenilor de grad $n+1$, n și $n-1$ din această identitate, cînd se obține următorul sistem liniar:

$$b'_n = a_{n+1} b_{n+1}, \quad b'_{n-1} = a_n b'_n + a_{n+1} b_n, \quad b'_{n-2} = a_{n-1} b''_{n-1} + a_n b'_{n-1} + b_{n-1},$$

în care $b_{n+1}, b_n, \ldots, b'_n, b'_{n-1}, \ldots$ și $b''_{n-1}, \ldots$ sînt coeficienții polinoamelor ortogonale Q_{n+1}, Q_n, Q_{n-1} respectiv și deci afirmația d) este demonstrată.

În sfîrșit, pentru a justifica ultima afirmație a teoremei, se face în primul rînd observația că șirul de polinoame ortogonale $(Q_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ are coeficienții reali (deci $Q_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$); într-adevăr, Q_0 se exprimă

cu ajutorul numărului real 1 iar $Q_1(x) = x + a$, unde a se determină din condiția de ortogonalitate $(Q_0, Q_1)_\rho = \int_J \rho(x)(a+x)\mathrm{d}x = 0$, adică $a = -\dfrac{\int_J x\rho(x)\,\mathrm{d}x}{\int_J \rho(x)\,\mathrm{d}x}$ și cum ρ are valori reale (fiind pondere), avem $a \in \mathbb{R}$. Or, dacă polinoamele Q_0 și Q_1 au coeficienții reali, relația de recurență de la punctul d) îl determină pe Q_2 care va avea deci și el coeficienții reali; repetînd acest raționament, rezultă succesiv polinoamele $Q_3, Q_4, \ldots$ care vor avea coeficienții reali.

Scriind relația de ortogonalitate $(Q_0, Q_n)_\rho = 0$, $n \in \mathbb{N}$, rezultă $\int_J \rho(x)\, Q_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$ și deoarece $\rho \geqslant 0$, neapărat Q_n își schimbă semnul în intervalul J; fie $x_1, \ldots, x_m$, $m \leqslant n$ punctele din J în care Q_n își schimbă semnul. Atunci produsul $R_m Q_n$, unde $R_m(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_m)$, are semn constant în J [$R_m(x) Q_n(x) \geqslant 0$ sau $\leqslant 0$ dacă $x \in J$], ceea ce implică $\int_J \rho(x) R_m(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$, adică $(R_m, Q_m)_\rho \neq 0$; pentru ca această inegalitate să nu fie contradictorie cu punctul b) al teoremei, nu putem presupune $m < n$, deci $m = n$. Așadar, în J polinomul Q_n își schimbă semnul exact de n ori. □

În continuare vom presupune ponderea ρ astfel încît să fie verificate relațiile

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad (\rho\beta)(x) = 0 \text{ pentru } x = a \text{ și } x = b, \quad J =]a, b[, \quad a, b \in \mathbb{R}, \tag{14.8}$$

unde α și β sînt polinoame cu coeficienți reali de grad cel mult unu, respectiv de grad cel mult doi, dar nu avem simultan $\deg\alpha < 1$ $\deg\beta < 2$:

$$\alpha(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x, \quad \beta(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2, \quad \alpha_j, \beta_k \in \mathbb{R}, \quad j = 0, 1, \quad k = 0, 1, 2. \tag{14.8'}$$

Integrînd ecuația diferențială (14.8), ρ va rezulta o funcție reală și analitică în J.

Teorema 14.3. *Dacă șirul de polinoame $(Q_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ este ortogonal cu ponderea ρ, care verifică relațiile* (14.8), *pe intervalul $J \subset \mathbb{R}$, atunci*

a) $$Q_n = a_n \frac{1}{\rho} \cdot (\rho\beta^n)^{(n)}, \; n \in \mathbb{Z}_+ \; (\textit{formula Rodrigues}), \tag{14.9}$$

unde $a_n \in \mathbb{R}$ este un factor multiplicativ arbitrar;

b) Q_n *este soluție particulară a ecuației diferențiale*

$$\beta y'' + (\alpha + \beta')y' - n\,[\alpha_1 + (n+1)\beta_2]y = 0\,; \qquad (14.10)$$

c) *există* $K : J \times B_r \to \mathbf{C}$, *unde* $B_r = \{t \mid t \in \mathbf{C}, |t| < r\}$, K *fiind olomorfă în* B_r *și astfel încît*

$$K(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x)\, t^n,\ |t| < r,\ r > 0\,;$$

funcția K (*care se numește funcție generatoare a șirului de polinoame ortogonale* $(Q_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$) *are expresia*

$$K(x, t) = \frac{\rho(t_1)}{\rho(x)} \cdot \frac{1}{1 - t\beta'(t_1)}, \qquad (14.11)$$

unde t_1 *este zeroul cel mai apropiat de* x *al polinomului* $z - x - t\beta(z)$.

a) Printr-o derivare se obține

$$(\rho\beta^n)^{(n)} = (\rho'\beta^n + n\rho\beta^{n-1}\beta')^{(n-1)} = (\rho\beta^{n-1}R_{n,1})^{(n-1)}$$

(dacă se înlocuiește ρ' prin $\frac{\alpha}{\beta}\rho$ și se notează $R_{n,1} = \alpha + n\beta'$, deci $R_{n,1}$ este un polinom de gradul întîi), iar prin inducție se obține ușor egalitatea $(\rho\beta^n)^{(n)} = (\rho\beta^{n-k}\,R_{n,k})^{(n-k)}$, cu $R_{n,k}$ un polinom de grad k, din care pentru $k = n$ se va obține $(\rho\beta^n)^{(n)} = \rho R_{n,n}$, ceea ce arată că egalitatea (14.9) definește efectiv un polinom de grad n.

Pentru a arăta că acest polinom coincide cu Q_n se utilizează teorema 14.2, c) : calculînd prin părți, pentru $k < n$, se obține

$$\left(x^k, \frac{1}{\rho}(\rho\beta^n)^{(n)}\right)_\rho = \int_J x^k(\rho\beta^n)^{(n)}\,dx = (-1)^k k \int_J (\rho\beta^n)^{(n-k)}dx = 0,$$

deoarece toți termenii integrați sînt nuli în baza lui (14.8).

Pentru propoziția b), vom nota $u_n = \rho\beta^n$ și deoarece $u_n' = \rho\,\beta^{n-1}(\alpha + n\,\beta')$, va rezulta egalitatea $\beta u_n' = (\alpha + n\beta')u_n$ care derivată de $n+1$ ori conduce la identitatea

$$\beta(u_n^{(n)})'' + (\beta' - \alpha)\,(u_n^{(n)})' - \frac{1}{2}(n+1)\,(2\alpha' - n\,\beta'')\,u_n^{(n)} = 0,$$

adică, notînd $V_n = u_n^{(n)}$, rezultă că V_n verifică ecuația diferențială

$$\beta V_n'' + (\beta' - \alpha)\,V_n' - (n-1)\left(\alpha' + \frac{1}{2}n\beta''\right)V_n = 0$$

care se mai poate scrie și sub forma $\left(\frac{\beta}{\rho}V_n'\right)' - \frac{n-1}{\beta}\left(\alpha' + \frac{1}{2}n\beta''\right)V_n = 0$.

Înlocuind $\frac{1}{\rho}V_n$ prin Q_n iar $\frac{1}{\rho}V_n'$ prin $Q_n' + \frac{\alpha}{\beta}Q_n$, rezultă ecuația (14.10), deoarece $\alpha' = \alpha_1$ și $\beta'' = 2\beta_2$.

În sfîrșit, deoarece ρ și β sînt funcții analitice, se poate utiliza formula lui Cauchy pentru exprimarea derivatei de ordin n printr-o integrală de contur (în planul complex) și deci se pot scrie egalitățile, utilizînd uniform convergența progresiei geometrice :

$$K(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x)t^n = \frac{1}{\rho(x)}\sum_{n=0}^{\infty} t^n\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{C_x}\frac{\rho(z)\,\beta^n(z)}{(z-x)^{n+1}}\,dz\right] =$$

$$= \frac{1}{\rho(x)}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{C_x}\frac{\rho(z)}{z-x}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\beta(z)t}{z-x}\right]^n\right\}dz = \frac{1}{\rho(x)}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{C_x}\frac{\rho(z)\,dz}{z - x - t\,\beta(z)},$$

dacă se utilizează formula Rodrigues (14.9) cu $A_n = \frac{1}{n!}$ (C_x este un contur din planul complex z care ocolește punctul x). Cum numitorul este un polinom de grad cel mult doi, care pentru $t = 0$ se anulează pentru $z = x$, pentru $|t|$ suficient de mic, condiție obligatorie pentru a avea $\left|\frac{\beta(z)\,t}{z-x}\right| < 1$ cînd $z \in C_x$, acest polinom va avea un zero în vecinătatea lui x. Aplicînd teorema reziduurilor, rezultă egalitatea (14.11). ⌟

În cele ce urmează vor fi studiate mai în amănunt cîteva șiruri de polinoame ortogonale importante în aplicații și anume :

— *polinoamele Jacobi* $(J_n^{(p,q)})_{n\in\mathbb{Z}_+}$ pentru care $J =]a, b[$, $a, b \in \mathbb{R}$ iar $\rho(x) = (x-a)^q(b-x)^p$ cu cazurile particulare importante.

— *polinoamele Gegenbauer*, pentru care $p = q = \lambda - \frac{1}{2}$, cu notația $C_n^{(\lambda)} = J_n^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}$;

— *polinoamele Legendre*, $P_n = J_n^{(0,0)} = C_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}$, deci $p = q = 0$;

— *polinoamele Cebîșev* $T_n = J_n^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)} = C_n^{(0)}$ deci $p = q = -\frac{1}{2}$;

— *polinoamele Laguerre* $(L_n^{(\lambda)})_{n\in\mathbb{Z}_+}$ pentru care $J =]0, +\infty[$ iar $\rho(x) = x^{\lambda}\, e^{-x}$;

— *polinoamele Hermite* $(H_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$, pentru care $J = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ iar $\rho(x) = \exp(-x^2)$.

Se verifică ușor că aceste șiruri de polinoame ortogonale verifică condițiile (14.8) (pentru pondere).

14.3. Polinoamele Legendre

În baza definiției de la 14.2, *polinoamele Legendre* formează un șir ortogonal pe intervalul $J =]a, b[$, cu $b-a < \infty$, cu ponderea $\rho(x) = 1$; polinomul Legendre de gradul n se notează prin P_n; așadar, proprietatea fundamentală a șirului ortogonal $(P_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ este exprimată prin relația de ortogonalitate

$$(P_n, P_n) = \int_a^b P_n(x)P_m(x)\,dx = 0,\quad n \neq m,\ n, m \in \mathbb{Z}_+ \qquad (14.12)$$

cu $(f, g) = (f, g)_\rho$, $\rho(x) = 1$.

Proprietățile fundamentale ale șirului ortogonal $(P_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ decurg din faptul că sînt valabile relațiile (14.8) în care

$$\alpha(x) = 0,\quad \beta(x) = (x-a)(x-b), \qquad (14.13)$$

adică

$$\alpha_0 = \alpha_1 = 0,\quad \beta_0 = ab,\quad \beta_1 = -(a+b),\quad \beta_2 = 1,$$

ceea ce face ca teorema 14.3 să fie valabilă și deci:

— polinomul Legendre de gradul n este dat direct prin formula Rodrigues:

$$P_n(x) = a_n \frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n(x-b)^n],\quad n \in \mathbb{Z}_+, \qquad (14.14)$$

în care $a_n \in \mathbb{R}$ se determină printr-o „condiție de normare" care în cazul polinoamelor Legendre este

$$P_n(b) = 1, \qquad (14.14')$$

ceea ce, deoarece $[(x-a)^n(x-b)^n]^{(n)} = n!(x-a)^n + (x-b)\cdot A(x)$ (în baza formulei lui Leibniz de derivare a unui produs), conduce la expresia $a_n = \frac{1}{n!(b-a)^n}$ și deci formula lui Rodrigues (14.4) se va scrie sub forma

$$P_n(x) = \frac{1}{n!(b-a)^n}\frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n(x-b)^n],\quad n \in \mathbb{Z}_+. \qquad (14.14'')$$

— Polinomul Legendre P_n este soluție particulară a ecuației diferențiale

$$(x-a)(x-b)y'' + (2x-a-b)y' - n(n+1)y = 0,\quad n \in \mathbb{Z}_+, \qquad (14.15)$$

a cărei formă autoadjunctă va fi

$$\frac{d}{dx}[(x-a)(x-b)y'] - n(n+1)y = 0,\quad n \in \mathbb{Z}_+; \qquad (14.15')$$

cu ajutorul substituției $y \to P_n y$ se obține soluția ecuației (14.15) liniar independentă de P_n și anume, notînd cu P_n^* această soluție, vom avea

$$P_n^*(x) = P_n(x)\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{(t-a)(t-b)P_n^2(t)},\quad n \in \mathbb{Z}_+. \qquad (14.15'')$$

De regulă, polinoamele Legendre (ca și polinoamele Jacobi) se studiază nu pe un interval $[a, b[$ ci de obicei se consideră, fie intervalul $]-1, +1[$, fie intervalul $]0,1[$ și de aceea, în continuare (numai pentru simplificarea calculelor) vom presupune $a = -1$ și $b = +1$. În această situație, formula lui Rodrigues (14.14'') se va scrie

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n],\quad n \in \mathbb{Z}_+, \qquad (14.16)$$

iar ecuația diferențială (14.15) va deveni

$$(1-x^2)\,y''-2xy'+n(n+1)y=0 \quad \text{sau} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,[(1-x^2)y']+n\,(n+1)\,y=0. \tag{14.17}$$

Funcția generatoare (14.11) a polinoamelor Legendre va fi

$$K(x,\,t)=(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\,t^n, \tag{14.18}$$

deoarece polinomul $z-x-t\,\beta(z)=z-x-t(1-z^2)$ are zeroul cel mai apropiat de x egal cu $t_1=\dfrac{1}{2t}(\sqrt{1+4xt+4t^2}-1)$, ceea ce face să avem

$$\frac{\rho(t_1)}{\rho(x)}\,\frac{1}{1\,-\,t\beta'(t_1)}=\frac{1}{1\,+\,2t\cdot t_1}=\frac{1}{\sqrt{1+4t+4t^2}}$$

și transformarea $2t\to -\,t$ conduce la expresia indicată. Pentru ca egalitățile (14.16) și (14.18) să fie compatibile mai trebuie arătat că din (14.18) rezultă $P_n(1)=1$, ceea ce este evident, deoarece

$$(1-2\,xt+t^2)^{-1/2}=(1-t)^{-1}=1+t\,+\,\ldots\,+\,t^n\,+\,\ldots \text{ pentru } x=1.$$

Funcția generatoare a polinoamelor Legendre apare și direct, în diverse situații practice; astfel, de exemplu, dacă punctele materiale P_1 și P_2 au masele m_1 și m_2 și sînt situate la distanța r unul de celălalt, conform cu legea atracției universale, forța reciprocă de atracție este proporțională cu $m_1m_2\,r^{-2}$, fiind dirijată după direcția P_1P_2 al cărei versor este $\dfrac{1}{r}\,\mathbf{r}$; deci $\mathbf{F}=(km_1m_2)r^{-3}\,\mathbf{r}$ iar un calcul simplu arată că $\mathbf{F}$ este un cîmp vectorial potențial, funcția potențial fiind $V=(k\,m_1m_2)r^{-1}$, adică $\mathbf{F}=-\,\mathrm{grad}\,V$. Presupunînd $k\cdot m_1\cdot m_2=1$, punctul P_2 plasat pe axa Oz la distanță unitate de origine iar P_1 situat la distanța t de origine și notînd cu θ unghiul dintre segmentele OP_1 și OP_2, teorema lui Pitagora generalizată dă $r^2=1-2t\cos\theta+t^2$, ceea ce face ca pentru potențialul elementar să se obțină expresia $V=(1\,-\,2\,t\,\cos\theta\,+\,t^2)^{-1/2}$, care se transformă în funcția generatoare a polinoamelor Legendre dacă se notează $\cos\theta=x$ (deci în această situație rezultă $|x|<1$) iar dezvoltarea în serie din

(14.18) va fi valabilă pentru $|t|<1$, deoarece punctele critice ale funcției $(1-2\,tx\,+\,t^2)^{-1/2}$ vor fi obținute rezolvînd în raport cu t ecuația $t^2-2t\,x+1=0$. Deci $t'=x\pm\sqrt{x^2-1}=\cos\theta\pm\mathrm{i}\,\sin\theta=\mathrm{cis}(\pm\,\theta)$, adică $|t'|=1$).

Relația de ortogonalitate pentru polinoamele Legendre se va scrie

$$(P_n,\,P_m)=\int_{-1}^{+1}P_n(x)\,P_m(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{2n\,+\,1}\,\delta_{nm},\quad n,\,m\in\mathbb{Z}_+, \tag{14.19}$$

care pentru a fi justificată este suficient să fie verificată pentru $n=m$ [cazul $n\neq m$ revine la relația (14.12)]. Or

$$\int_{-1}^{+1}P_n^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2^n n\,!}\int_{-1}^{+1}P_n(x)[(x^2-1)^n]\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n}{2^n n\,!}\int_{-1}^{+1}P_n^{(n)}(x^2-1)^n\mathrm{d}x,$$

ultima egalitate obținîndu-se prin n integrări succesive prin părți. Termenii integrați fiind de forma $f(x)\,[(1-x^2)^n]^{(n-k)}$, $k=1,\,2,\ldots,\,n$, dispar, căci se anulează pentru $x=\pm\,1$ (avînd zerouri de ordin $k=1,\,2,\,\ldots,\,n$ în $+1$ și -1). Deoarece

$$P_n^{(n)}(x)=\frac{1}{2^n\cdot n\,!}\,[(x^2-1)^n]^{(2n)}=\frac{(2n)\,!}{2^n\cdot n\,!}$$

iar

$$\int_{-1}^{1+}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x=2^{2n+1}\,B(n+1,\,n+1)=2^{2n+1}\,\frac{(n\,!)^2}{(2n+1)!}$$

rezultă imediat egalitatea (14.19) pentru $n=m$.

O proprietate importantă a polinoamelor Legendre constă în faptul că acestea sînt cazuri particulare ale seriei hipergeometrice definite în cap. 12; într-adevăr, dacă în ecuația (14.15) se face $a=0$, $b=1$, se obține ecuația lui Gauss în care $a=-\,n$, $b=n+1$, $n\in\mathbb{Z}_+$ iar $c=1$. Dacă se consideră polinoamele Legendre date de formula Rodrigues (14.16), se poate stabili ușor egalitatea

$$P_n(x)={}_2F_1\left(-n,\,n+1\,;\,1\,;\,\frac{1-x}{2}\right), \tag{14.16'}$$

deoarece se verifică imediat că ecuația polinoamelor Legendre (14.17) se transformă în ecuația $z(1-z)y''+(1-2z)y'+n(n+1)y=0$ punînd

$x=1-2z$, ceea ce antrenează $P_n(x) = A \cdot {}_2F_1\left(-n, n+1; 1; \frac{1-x}{2}\right)$, constanta A determinîndu-se din condițiile $P_n(1)=1$ și ${}_2F_1(a,b;c;0)=1$ (ceea ce înseamnă $A=1$); se ține seama și de faptul că a doua soluție a ecuației lui Gauss, liniar independentă de ${}_2F_1$, nu este un polinom în condițiile de față.

În ceea ce privește reprezentările integrale ale polinoamelor Legendre, vom demonstra rezultatul următor:

Teorema 14.4. *Polinoamele Legendre se pot scrie fie sub forma integrală*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_C \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}\,dz, \quad n \in \mathbb{Z}_+ \text{ (formula lui Schläfli)}, \tag{14.20}$$

unde C este un contur care ocolește punctul x din planul complex z, fie sub forma

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (x+\sqrt{x^2-1}\cos t)^n\,dt, \quad n \in \mathbb{Z}_+ \text{ (formula lui Laplace)}; \tag{14.20'}$$

în plus, dacă se pune $x = \cos\theta$, $0 < \theta < \pi$, se poate obține și reprezentarea integrală

$$P_n(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\theta} \frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\psi\right]}{\sqrt{2\cos\psi - 2\cos\theta}}\,d\psi, \; n \in \mathbb{Z}_+ \tag{14.20''}$$

(formula Dirichlet-Mehler).

Din dezvoltarea (14.19), utilizînd formula care permite scrierea sub formă integrală a coeficienților unei dezvoltări Taylor, rezultă egalitățile

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{K(x,t)}{t^{n+1}}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}}{t^{n+1}}\,dt$$

în care C_1 este un contur care înconjoară originea $t=0$ din planul complex t; punînd $\sqrt{1-2xt+t^2}=1-tz$, $dt = -2\,\frac{z^2-2zx+1}{(z^2-1)^2}\,dz$,

se obține exact formula (14.20), conturul C_1 transformîndu-se în conturul C, deoarece din $t = 2\,\frac{z-x}{z^2-1}$ se deduce că $t=0$ devine $z=x$.

Pentru a obține formula lui Laplace este suficient să se efectueze în formula lui Schläfli schimbarea de variabilă $z = x + \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{cis}\,t$, $-\pi < t \leqslant \pi$, ceea ce conduce la egalitatea $P_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} (x + \sqrt{x^2-1}\cos t)^n\,dt$, care coincide cu (14.20') dacă se utilizează faptul că funcția cosinus este pară. În fine, din (14.20') rezultă direct, cu schimbarea $z = \cos\theta + i\sin\theta\cdot\cos t$,

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos\theta + i\sin\theta\cos t)^n\,dt = \frac{1}{\pi i}\int_{\mathrm{cis}(-\theta)}^{\mathrm{cis}(\theta)} \frac{z^n\,dz}{\sqrt{1-2z\cos\theta+z^2}}, \tag{14.21}$$

integrala calculîndu-se pe segmentul AB din fig. 14.1. Deoarece integrandul este o funcție olomorfă în domeniul simplu conex $ACBA$ integrala pe segmentul AB poate fi înlocuită prin integrala calculată pe arcul ACB și cu schimbarea de variabilă $z = \mathrm{cis}\,\psi$ se va obține formula integrală (14.20''). □

Din teorema 14.4 se poate obține o inegalitate importantă pentru polinoamele Legendre și anume, dacă $x \in [-1, +1]$, avem $|P_n(x)| \leqslant 1$. Într-adevăr, dacă $x \in [-1, +1]$, se poate pune $x = \cos\theta$, $\theta \in [0, 2\pi[$ și deci din prima egalitate (14.21), deoarece $|\cos\theta + i\sin\theta\cos t| = (\cos^2\theta + \sin^2\theta\cos^2 t)^{1/2} \leqslant (\cos^2\theta + \sin^2\theta)^{1/2} = 1$, va rezulta

$$|P_n(\cos\theta)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dt = 1.$$

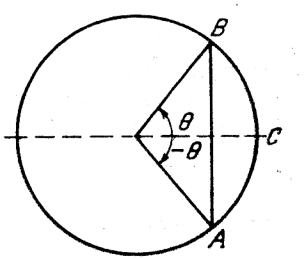

Fig. 14. 1

Utilizînd dezvoltarea (14.19), prin derivare fie în raport cu t, fie în raport cu x (și egalînd coeficienții acelorași puteri) sau prin diverse eliminări se pot obține următoarele relații de recurență:

$$(2n+1)xP_n(x) - (n+1)P_{n+1}(x) - nP_{n-1}(x) = 0,$$

$$P'_{n-1}(x) - P_n(x) - 2xP'_n(x) - P'_{n+1}(x) = 0,$$

$$P'_{n-1}(x) + nP_n(x) - xP'_n(x) = 0, \quad (n+1)P_n(x) + xP'_n(x) - P'_{n+1}(x) = 0,$$

$$(2n+1)P_n(x) - P'_{n+1}(x) + P'_{n-1}(x) = 0,$$

$$(1-x^2)P'_n(x) - nP_{n-1}(x) - nxP_n(x) = 0.$$

De exemplu, prima identitate se obţine prin derivarea lui (14.19) în raport cu t, scriind rezultatul sub forma

$$\frac{x-t}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = (1-2xt+t^2)\sum_{n=1}^{\infty} n\,P_n(x)t^{n-1}\left(=(x-t)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n\right)$$

şi egalînd coeficienţii lui t^n.

14.4. Polinoamele Jacobi

În baza definiţiei de la 14.2, *polinoamele Jacobi* $J_n^{(p,q)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ formează un şir ortogonal pe un interval J de lungime finită, ponderea fiind egală cu $\rho(x) = (x-a)^q(b-x)^p$, dacă $J =]a, b[$, în care $p, q \in \mathbb{R}$, $p > -1$, $q > -1$ (aceste ipoteze restrictive pentru exponenţii p şi q sînt necesare pentru convergenţa integralelor în care apare ρ); pentru uşurinţa calculelor se presupune $J =]-1, +1[$, deci $\rho(x) = (1-x)^p(1+x)^q$ iar calculul expresiei $\frac{\rho'}{\rho}$ conduce la următoarele egalităţi:

$$\alpha(x) = q-p-(p+q)x, \qquad \beta(x) = 1-x^2; \tag{14.22}$$

pentru ca produsul $\rho\beta$ să fie nul pentru $x = -1$ şi $x = +1$, trebuie ca $p > -1$, $q > -1$ (condiţii presupuse verificate).

În baza teoremei 14.3, prin particularizare, se obţin următoarele rezultate (valabile pentru polinoamele Jacobi):

— Polinomul Jacobi $J_n^{(p,q)}$ este o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale

$$(1-x^2)y'' + [q-p-(p+q+2)x]y' + n(n+p+q+1)y = 0, \tag{14.23}$$

care, prin schimbarea de variabilă $x = 1-2z$, se reduce la ecuaţia Gauss

$$z(1-z)w'' + [p+1-(p+q+2)z]w' + n(n+p+q+1)w = 0$$

cu $w(z) = y(1-2z)$, ai cărei parametri vor fi $a = -n$, $b = n+p+q+1$, $c = p+1$ [ceea ce arată că polinoamele Jacobi sînt polinoamele cele mai generale care se pot deduce din seria hipergeometrică: din funcţia ${}_2F_1(a, b; c; z)$ se obţin polinoame numai dacă a (sau b) este un număr întreg nepozitiv iar aceste polinoame vor depinde de doi parametri b (respectiv a) şi c, egali deci cu $n+p+q+1$, respectiv cu $p+1$]. Va rezulta egalitatea

$$J_n^{(p,q)}(x) = \frac{\Gamma(n+p+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(p+1)}\,{}_2F_1\left(-n, n+p+q+1; p+1; \frac{1-x}{2}\right), \tag{14.24}$$

factorul multiplicativ din faţa seriei hipergeometrice fiind introdus pentru a fi verificată condiţia de normare

$$J_n^{(p,q)}(1) = \frac{\Gamma(p+n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(p+1)}; \tag{14.24'}$$

utilizată în cazul polinoamelor Jacobi şi care pentru $p = 0$, $q = 0$ cînd $J_n^{(0,0)} = P_n$, se obţine condiţia de normare $P_n(1) = 1$ folosită în cazul polinoamelor Legendre.

— Formula Rodrigues pentru polinoamele Jacobi este

$$J_n^{(p,q)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!}(1-x)^{-p}(1+x)^{-q}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(1-x)^{p+n}(1+x)^{q+n}], n \in \mathbb{Z}_+, \tag{14.25}$$

factorul multiplicativ $\frac{(-1)^n}{n!\,2^n}$ fiind introdus pentru a verifica relaţia de normare (14.24').

— Funcţia generatoare pentru polinoamele Jacobi este

$$K(x, t) = 2^{p+q}(1-2xt+t^2)^{-1/2}\,(1-t+\sqrt{1-2xt+t^2})^{-p}\,(1+t+$$

$$+\sqrt{1-2xt+t^2})^{-q}$$

după cum se poate verifica prin utilizarea formulei (14.11) în care $t_1 = \frac{1}{2t}(-1+\sqrt{1+4xt+4t^2})$ sau, punînd t în loc de $-2t$, $t_1 = -\frac{1}{t}(1-\sqrt{1-2xt+t^2})$ și deci

$$\frac{\rho(t_1)}{\rho(x)} = 2^{p+q}(1-t+\sqrt{1-2xt+t^2})^{-p}(1+t+\sqrt{1-2xt+t^2})^{-q}$$

iar

$$\frac{1}{1+\frac{t}{2}\beta'(t_1)} = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}};$$

se poate verifica și descompunerea

$$K(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n^{(p,q)}(x)t^n.$$

În fine, vom arăta că este valabilă egalitatea

$$(J_n^{(p,q)}, J_m^{(p,q)})_\rho = \int_{-1}^{+1}(1-x)^p(1+x)^q J_n^{(p,q)}(x) J_m^{(p,q)}(x)\,dx =$$

$$= \frac{2^{p+q+1}\Gamma(n+p+1)\Gamma(n+q+1)}{2n+p+q+1\,\Gamma(n+1)\Gamma(n+p+q+1)}\delta_{mn},\ n,\ m \in \mathbb{Z}_+;$$

pentru aceasta este suficient să se considere cazul $n=m$, cînd prin utilizarea egalității (14.25) se va putea scrie

$$(J_n^{(p,q)}, J_n^{(p,q)})_\rho = \|J_n^{(p,q)}\|_\rho^2 =$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{+1} J_n^{(p,q)}(x)\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{p+n}(1+x)^{q+n}]dx =$$

$$= \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n J_n^{(p,q)}(x)}{dx^n}\int_{-1}^{+1}(1-x)^{p+n}(1-x)^{q+n}\,dx,$$

ultima egalitate obținîndu-se după n integrări prin părți, făcînd observația că toți termenii integrați vor fi nuli, avînd zerouri în punctele $x=-1$ și $x=+1$.

... Din egalitatea (14.24) se găsește

$$J_n^{(p,q)}(x) = \frac{\Gamma(2n+p+q+1)x^n}{2^n\Gamma(n+1)\Gamma(n+p+q+1)} + \dots$$

(dacă se ține seama de termenul de grad maxim din polinomul ${}_2F_1\left(-n,\ n+p+q+1;\ p+1;\ \frac{1-x}{2}\right)$), adică

$$\frac{d^n J_n^{(p,q)}(x)}{dx^n} = \frac{\Gamma(2n+p+q+1)}{2^n\Gamma(n+p+q+1)}$$

și deoarece

$$\int_{-1}^{+1}(1-x)^{p+n}(1+x)^{q+n}\,dx = B(p+n+1, q+n+1)\cdot 2^{2n+p+q+1}$$

se obține exact egalitatea menționată.

Este evident că prin particularizare, pentru $p=q=0$, din rezultatele anterioare se obțin relațiile corespunzătoare din teoria polinoamelor Legendre. Ecuația polinoamelor Jacobi se poate scrie sub următoarea formă autoadjunctă:

$$\frac{d}{dx}[(1-x)^{p+1}(1+x)^{q+1}y'] + n(n+p+q+1)(1-x)^p(1+x)^q y = 0,$$

iar o soluție liniar independentă de $J_n^{(p,q)}$ a ecuației (14.23) va fi

$$y_2(x) = J_n^{(p,q)}(x)\int_0^x \frac{dt}{(1-t)^{p+1}(1+t)^{q+1}[J_n^{(p,q)}(t)]^2},\ n \in \mathbb{Z}_+.$$

De asemenea, se poate justifica cu ajutorul lui (14.25) și egalitatea utilă în aplicații

$$J_n^{(p,q)}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = (x-1)^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(p+n+1)\Gamma(q+n+1)x^k}{k!\,\Gamma(n-k+1)\,\Gamma(q+k+1)\,\Gamma(p+k+n+1)}$$

14.5. Polinoamele Gegenbauer. Funcțiile Legendre asociate

Pentru definirea *poliniamelor Gegenbauer* $(C_n^{(\lambda)})_{n\in\mathbb{Z}_+}$ (sau a *polinoamelor ultrasferice)* nu se va utiliza metoda anterioară (bazată pe teorema 14.3) ci se va porni de la funcția generatoare K, presupusă de forma

$$K(x,t)=(1-2xt+t^2)^{-\lambda}=\sum_{n=1}^{\infty}C_n^{(\lambda)}(x)t^n. \qquad (14.26)$$

Această funcție generatoare este deci o generalizare a funcției generatoare a polinoamelor Legendre, care se obține din (14.26) pentru $\lambda=\frac{1}{2}$, deci $C_n^{(1/2)}=P_n$. Dacă descompunerea (14.26) este valabilă, atunci o derivare în raport cu t conduce la identitatea

$$2\lambda(x-t)(1-2xt+t^2)^{-\lambda}=(1-2xt+t^2)\sum_{n=1}^{\infty}nC_n^{(\lambda)}(x)\,t^{n-1},$$

din care, ținînd seama de (14.26), prin egalarea coeficienților lui t^n din ambii membri se obține următoarea relație de recurență:

$$2x(\lambda+n)\,C_n^{(\lambda)}(x)=(n+1)C_{n+1}^{(\lambda)}(x)+(2\lambda+n-1)C_{n-1}^{(\lambda)}(x), \qquad (14.27)$$

iar derivînd în raport cu x, aceleași calcule conduc la relația de recurență

$$2\lambda C_n^{(\lambda)}(x)=-\dot{C}_{n+1}^{(\lambda)}(x)-2x\dot{C}_n^{(\lambda)}(x)+\dot{C}_{n-1}^{(\lambda)}(x),\ \text{unde}\ \dot{f}(x)=\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}. \qquad (14.27')$$

Înlocuind $\dot{C}_{n+1}^{(\lambda)}$ extras din (14.27') în derivata în raport cu x a relației (14.27), se obține pentru $\lambda\neq 1$ o nouă relație de recurență (independentă de λ):

$$n\,C_n^{(\lambda)}(x)-x\dot{C}_n^{(\lambda)}(x)+\dot{C}_{n-1}^{(\lambda)}(x)=0, \qquad (14.27'')$$

iar eliminarea lui $\dot{C}_{n-1}^{(\lambda)}$ între (14.27'') și derivata relației (14.27) conduce la egalitatea

$$(2\lambda+n)\,C_n^{(\lambda)}(x)+x\,\dot{C}_n^{(\lambda)}(x)-\dot{C}_{n+1}^{(\lambda)}(x)=0. \qquad (14.27''')$$

Înlocuind în (14.27''') n prin $n-1$ și eliminînd pe $\dot{C}_{n-1}^{(\lambda)}$ între această relație și (14.27'), se obține identitatea

$$(1-x^2)\dot{C}_n^{(\lambda)}(x)-(2\lambda+n-1)C_{n-1}^{(\lambda)}(x)-nx\,C_n^{(\lambda)}(x)=0,$$

care derivată în raport cu x, prin eliminarea lui $\dot{C}_{n-1}^{(\lambda)}$ cu ajutorul lui (14.27'') va găsi identitatea

$$(1-x^2)\,\ddot{C}_n^{(\lambda)}-(2\lambda+1)\,x\,\dot{C}_n^{(\lambda)}+n(n+2\lambda)C_n=0, \qquad (14.28)$$

adică funcțiile $C_n^{(\lambda)}$ pentru orice λ și $n\in\mathbb{Z}_+$ sînt soluții ale ecuației diferențiale

$$(1-x^2)y''-(2\lambda+1)\,xy'+n(n+2\lambda)y=0. \qquad (14.28')$$

Aceasta este ecuația polinoamelor Jacobi pentru $p=q=\lambda-\frac{1}{2}$.

Cum $C_n^{(\lambda)}$ este efectiv un polinom de grad n, deoarece

$$(1-2xt+t^2)^{-\lambda}=1-\lambda(t^2-2xt)+\ldots=1+2\lambda tx-\lambda t^2+\ldots,$$

rezultă $C_0^{(\lambda)}(x)=1$, $C_1^{(\lambda)}(x)=2\lambda x$ iar relația de recurență (14.27) scrisă succesiv pentru $n=1,2,\ldots$ arată că $C_2^{(\lambda)}$, $C_3^{(\lambda)},\ldots$ sînt de asemenea polinoame de grad $2,3,\ldots$ Așadar $C_n^{(\lambda)}=J_n^{(-1/2,\,-1/2)}$, $n\in\mathbb{Z}_+$, și toate proprietățile polinoamelor ultrasferice se vor obține prin particularizarea parametrilor p și q, din proprietățile corespunzătoare ale polinoamelor Jacobi. În particular, pentru $x=1$ avem

$$(1-2t+t^2)^{-\lambda}=(1-t)^{-2\lambda}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\lambda)_n}{n!},$$

deci

$$C_n^{(\lambda)}(1)=\frac{(2\lambda)_n}{n!}=\frac{\Gamma(2\lambda+n)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(2\lambda)} \qquad (14.29)$$

și, prin urmare,

$$C_n^{(\lambda)}(x)=A_n(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[1-x^2\right)^{n+\lambda-\frac{1}{2}}\Big].$$

Deoarece

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(1-x^2)^{n+\lambda-\frac{1}{2}}\right]=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(1-x)^{n+\lambda-\frac{1}{2}}(1+x)^{n+\lambda-\frac{1}{2}}\right]=$$

$$=\frac{\Gamma\left(n+\lambda-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}(-1)^n(1-x)^{\lambda-\frac{1}{2}}(1-x)^{n+\lambda-\frac{1}{2}}+\ \ldots$$

termenii nescriși conținînd termenul $(1-x)^{\lambda+\frac{1}{2}}$ factor, se obține în baza valorii găsite pentru $C_n^{(\lambda)}(1)$ egalitatea

$$\frac{\Gamma(2\lambda+n)}{n!\,\Gamma(2\lambda)}=(-1)^n2^n\,\frac{\Gamma\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}A_n,$$

ceea ce înseamnă că formula Rodrigues pentru polinoamele ultrasferice va fi

$$C_n^{(\lambda)}(x)=$$

$$=\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!}\,\frac{\Gamma(2\lambda+n)\ \Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)\ \Gamma\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)}(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(1-x^2)^{n+\lambda-\frac{1}{2}}\right]=$$

$$=\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^j}{j!}\,\frac{(\lambda)_{n-j}}{(n-2j)!}\,(2x)^{n-2j}\qquad(14.29)$$

Se observă că trebuie presupus $\lambda+\frac{1}{2}>0$, deci $\lambda>-\frac{1}{2}$, condiție care rezultă din (14.8), deoarece $(\rho\beta)(x)=(1-x^2)^{\lambda+\frac{1}{2}}$.

Dacă în dezvoltarea (14.27) se scrie $x=\cos\theta$, deoarece $1-2t\cos\theta+t^2=[1-t\cdot\mathrm{cis}(\theta)]\,[1-t\cdot\mathrm{cis}(-\theta)]$, se obține egalitatea

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{(\lambda)}(\cos\theta)t^n=[1-t\,\mathrm{cis}\,(\theta)]^{-\lambda}\,[1-t\,\mathrm{cis}\,(-\theta)]^{-\lambda}=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{-\lambda}{j}t^j\,\mathrm{cis}\,(j\theta)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-\lambda}{k}t^k\,\mathrm{cis}\,(k\theta),$$

din care, notînd $\alpha_m=(-1)^m\binom{-\lambda}{m}=\binom{m+\lambda-1}{m}$, $m\in\mathbb{Z}_+$, după efectuarea produsului celor două serii, prin egalarea coeficienților lui t^n se obține egalitatea

$$C_n^{(\lambda)}(\cos\theta)=\sum_{j+k=n}\alpha_j\alpha_k\mathrm{cis}[(j-k)\theta]=\sum_{m=0}^{n}\alpha_m\,\alpha_{n-m}\,\mathrm{cis}\,[(n-2m)\theta]=$$

$$=\sum_{m=0}^{n}\alpha_m\alpha_{n-m}\,\cos\,[(n-2m)\theta],$$

ultima egalitate obținîndu-se datorită faptului că $C_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$ are valori reale. Deoarece $\alpha_m>0$, în baza egalității (14.29) avem

$$|C_n^{(\lambda)}(\cos\theta)|\leqslant\sum_{m=0}^{n}\alpha_m\,\alpha_{n-m}=C_n^{(\lambda)}(1)=\frac{(2\lambda)_n}{n!},\ \lambda>0,\ \ n\in\mathbb{Z}_+,$$

iar inegalitatea obținută $|C_n^{(\lambda)}(\cos\theta)|\leqslant\frac{(2\lambda)_n}{n!}$ poate fi considerată ca o generalizare a inegalității $|P_n(\cos\theta)|\leqslant 1$ obținută la polinoamele Legendre [dacă $\lambda=\frac{1}{2}$ avem $(1)_n=n!$].

Pentru polinoamele ultrasferice relația de ortogonalitate se poate deduce din relația corespunzătoare a polinoamelor Jacobi sau direct, utilizînd egalitățile (14.29′); deoarece

$$[C_n^{(\lambda)}]^{(n)}=2^n\,(\lambda)_n=2^n\,\frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)},$$

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{n+\lambda-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x=2^{2(n+\lambda)}\,\frac{\Gamma^2\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2n+2\lambda+1)},$$

rezultă

$$(C_n^{(\lambda)},\ C_m^{(\lambda)})_\varrho = \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\, C_n^{(\lambda)}(x)\, C_m^{(\lambda)}(x)\, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n n!}\, \frac{\Gamma(2\lambda+n)\,\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)\,\Gamma\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{+1} C_n^{(\lambda)}(x)\, \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[(1-x^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}\right]\mathrm{d}x.$$

Presupunînd $m = n$, prin n integrări prin părți termenii integrați dispar, avînd zerouri pentru $x = \pm 1$ (în baza observațiilor anterioare); rezultă

$$(C_n^{(\lambda)},\ C_m^{(\lambda)}) = \delta_{mn} \frac{2^{2(n+\lambda)}\,\Gamma(n+2\lambda)\,\Gamma(n+\lambda)\,\Gamma\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)\,\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(2\lambda)\,\Gamma(2n+2\lambda+1)},$$

$$n, m \in \mathbb{Z}_+,\quad \lambda > -\frac{1}{2}.$$

Între polinoamele Legendre și polinoamele Gegenbauer există o legătură strînsă: astfel, derivînd de k ori șirul de polinoame Legendre $(P_j)_{j\in\mathbb{Z}_+}$, $k \in \mathbb{N}$, se obține un alt șir de polinoame $(P_j^{(k)})_{j=k,k+1,\ldots}$ care va coincide cu șirul $\left(C_{j-k}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}\right)_{j=k,\,k+1,\,\ldots}$ Într-adevăr, derivînd de k ori ecuația $(1-x^2)y''-2xy'+j(j+1)x = 0$ verificată de P_j, $j \in \mathbb{Z}_+$, se obține ecuația diferențială

$$(1-x^2)\,[y^{(k)}]'' - 2(k+1)x[y^{(k)}]'+(j-k)\,(j+k+1)\,[y^{(k)}] = 0; \tag{14.28''}$$

comparînd-o cu ecuația (14.28′) a polinoamelor Gegenbauer, prin identificare, se obține $\lambda = k+\frac{1}{2}$, $n=j-k$. Deci soluțiile polinomiale ale celor două ecuații vor diferi printr-un factor multiplicativ: $P_j^{(k)} = A(j,k)\ C_{k-j}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}$ și vom avea

$$P_j^{(k)}(x) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} P_j(x) = \frac{1}{2^j j!}\, \frac{\mathrm{d}^{j+k}}{\mathrm{d}x^{j+k}}\,[(x^2-1)^j],\ j \in \mathbb{Z}_+,$$

$$k = 0,\ 1,\ \ldots,\ j,$$

pentru ca, în particular, pentru $k = 0$ să se obțină formula Rodrigues pentru polinoamele Legendre. Aceste polinoame vor fi deci proporționale cu polinoamele $C_{j-k}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}$ și, prin urmare, proprietățile lor vor rezulta direct din proprietățile polinoamelor Gegenbauer.

O ecuație importantă în aplicații este următoarea ecuație diferențială:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[j(j+1) - \frac{k^2}{1-x^2}\right] y = 0,\quad j, k \in \mathbb{Z},$$

numită *ecuația diferențială a funcțiilor sferice*, care prin schimbarea de funcție $y(x) = (1-x^2)^{\frac{k}{2}}\, w(x)$ se transformă în ecuația

$$(1-x^2)w''-2(k+1)xw' + (j-k)(j+k+1)w = 0,$$

care nu este altceva decît ecuația (14.28″) dedusă anterior; prin urmare, o soluție particulară a ecuației diferențiale a funcțiilor sferice va fi de forma $(1-x^2)^{\frac{k}{2}} P_j^{(k)}(x)$ pe care o vom nota prin P_j^k. Așadar,

$$P_j^k(x) = (1-x^2)^{\frac{k}{2}}\, P_j^{(k)}(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{k}{2}}}{2^j j!}\, \frac{\mathrm{d}^{k+j}}{\mathrm{d}x^{k+j}}\,[(x^2-1)^j], \tag{14.30}$$

$$j \in \mathbb{Z}_+,\ k = 0, 1, \ldots, j,$$

iar funcțiile P_j^k se vor numi *funcții Legendre asociate*; proprietatea principală a acestor funcții este exprimată prin relațiile de ortogonalitate

$$(P_j^k,\ P_{j'}^k) = \int_{-1}^{+1} P_j^k(x)\, P_{j'}^k(x)\, \mathrm{d}x = \delta_{jj'}\, \frac{2}{2j+1}\, \frac{(j+k)!}{(j-k)!}, \tag{14.31}$$

$$j, j' \in \mathbb{Z}_+,\ k = 0, 1, \ldots, j,$$

care nu este altceva decît proprietatea de ortogonalitate a polinoamelor Gegenbauer $G_{j-k}^{(k+\frac{1}{2})}$. Într-adevăr, pentru $j' \neq j$ avem P_j^k şi $P_{j'}^k$, proporţionali cu funcţiile $(1-x^2)^{\frac{k}{2}} G_{j-k}^{(k+\frac{1}{2})}(x)$, respectiv $(1-x^2)^{\frac{k}{2}} G_{j'-k}^{(k+\frac{1}{2})}(x)$, în care $j, j' \in \mathbb{Z}_+$, iar k este fixat; rezultă că produsul scalar $(P_j^k, P_{j'}^k)$ va fi proporţional cu produsul scalar

$$\left((1-x^2)^{\frac{k}{2}} C_{j-k}^{(k+\frac{1}{2})}(x), (1-x^2)^{\frac{k}{2}} C_{j'-k}^{(k+\frac{1}{2})}\right) =$$

$$= \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^k C_{j-k}^{(k+\frac{1}{2})}(x) C_{j'-k}^{(k+\frac{1}{2})}(x)\,\mathrm{d}x = \left(C_{j-k}^{(k+\frac{1}{2})}, C_{j'-k}^{(k+\frac{1}{2})}\right)_\rho = 0,$$

$$\rho(x) = (1-x^2)^k.$$

Pentru a calcula produsul scalar $(P_j^k, P_j^k) = \| P_j^k \|^2$, vom face observaţia că funcţia Legendre asociată P_j^k diferă printr-un factor constant de funcţia $(1-x^2)^{-\frac{k}{2}} \dfrac{\mathrm{d}^{j-k}}{\mathrm{d}x^{j-k}} [(1-x^2)^j]$, deoarece, utilizînd expresia (14.29′) pentru $n = j-k$, $\lambda = k + \dfrac{1}{2}$, neluînd în consideraţie constantele multiplicative, rezultă

$$(1-x^2)^{\frac{k}{2}} P_j^{(k)}(x) = A_1 (1-x^2)^{\frac{k}{2}} C_{j-k}^{(k+\frac{1}{2})}(x) =$$

$$= A_2 (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \cdot (1-x^2)^{-k} \frac{\mathrm{d}^{j-k}}{\mathrm{d}x^{j-k}} [(1-x^2)]^j =$$

$$= A_2 (1-x^2)^{-\frac{k}{2}} \frac{\mathrm{d}^{j-k}}{\mathrm{d}x^{j-k}} [(1-x^2)^j];$$

acest factor se poate obţine egalînd coeficienţii termenilor de grad maxim din funcţiile $(1-x^2)^{\frac{k}{2}} P_j^{(k)}(x)$ şi $(1-x^2)^{-\frac{k}{2}} \dfrac{\mathrm{d}^{j-k}}{\mathrm{d}x^{j-k}} [(1-x^2)^j]$, sau considerînd raportul acestor funcţii care se prezintă sub forma $(1-x^2)^k \dfrac{[(1-x^2)^j]^{j+k}}{[(1-x^2)^j]^{j-k}}$. Este suficient să găsim coeficientul termenului de grad maxim care este evident egal $(-1)^k \dfrac{(j+k)!}{(j-k)!}$. Aşadar, s-a stabilit egalitatea

$$P_j^k(x) = (-1)^k \frac{(j+k)!}{(j-k)!} \frac{(1-x^2)^{-\frac{k}{2}}}{2^j \cdot j!} \frac{\mathrm{d}^{j-k}}{\mathrm{d}x^{j-k}} [(x^2-1)^j],$$

cu ajutorul căreia avem

$$(P_j^k, P_j^k) = \int_{-1}^{+1} P_j^k \cdot P_j^k \,\mathrm{d}x =$$

$$= (-1)^k \frac{(j+k)!}{(j-k)!\ 2^{2j}(j!)^2} \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \times$$

$$\times \frac{\mathrm{d}^{j+k}}{\mathrm{d}x^{j+k}} [(x^2-1)^j] (1-x^2)^{-\frac{k}{2}} \frac{\mathrm{d}^{j-k}}{\mathrm{d}x^{j-k}} [(x^2-1)^j]\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{(-1)^k\ (j+k)!}{2^{2j}(j!)^2\,(j-k)!} \int_{-1}^{+1} \frac{\mathrm{d}^{k+j}}{\mathrm{d}x^{k+j}} [(x^2-1)^j] \frac{\mathrm{d}^{j-k}}{\mathrm{d}x^{j-k}} [(x^2-1)^j]\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{(-1)^{2k}\ (j+k)!}{2^{2j}(j!)^2(j-k)!} \int_{-1}^{+1} \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j} [(x^2-1)^j] \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j} [(x^2-1)^j]\,\mathrm{d}x$$

(efectuînd k integrări prin părţi, termenii integraţi fiind nuli). Utilizînd formula lui Rodrigues pentru polinoamele Legendre, rezultă

$$(P_j^k, P_j^k) = \frac{(j+k)!}{(j-k)!} (P_j, P_j) = \frac{2}{2j+1} \frac{(j+k)!}{(j-k)!},$$

deoarece $(P_j, P_j) = \| P_j \|^2 = \dfrac{2}{2j+1}$.

14.6. Polinoamele Cebîşev

Şirul de polinoame ortogonale $(T_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$, unde T_n este polinomul Cebîşev de grad n, se defineşte prin condiţia ca ponderea produsului scalar să fie egală cu $(1-x^2)^{-1/2}$, dacă intervalul canonic de ortogonalitate este $]-1, +1[$; evident, $T_n = J_n^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}$, ceea ce conduce direct la următoarele rezultate: T_n este o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0,\ n \in \mathbb{Z}_+, \tag{14.32}$$

şi poate fi scrisă sub forma

$$T_n(x) = a_n(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\right],\ n \in \mathbb{Z}_+, \tag{14.33}$$

în care $a_n = \dfrac{(-1)^n\sqrt{\pi}}{2^n\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}$ dacă se utilizează condiţia de normare $T_n(1) = 1$.

Dacă în ecuaţia (14.32) se efectuează transformarea $x = \cos t$, se obţine ecuaţia diferenţială cu coeficienţi constanţi $\ddot{y} + n^2y = 0$, $\dot{y} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, ceea ce înseamnă că orice soluţie a ecuaţiei (14.32) va fi o combinaţie liniară a funcţiilor $\cos[n(\arccos x)]$, $\sin[n(\arccos x)]$, dintre care numai prima reprezintă un polinom (a doua soluţie este un polinom înmulţit cu $\sqrt{1-x^2}$); rezultă că polinomul T_n se mai poate scrie şi sub forma

$$T_n(x) = 2^{1-n}\cos\,[n(\arccos x)],\ n \in \mathbb{Z}_+, \tag{14.33'}$$

dacă se normează T_n astfel încît coeficientul lui x^n să fie egal cu unitatea [deoarece $\cos(nt) = \mathrm{Re}\ (\cos t + \mathrm{i}\sin t)^n = \cos^n t - \binom{n}{2}\cos^{n-2}t\sin^2 t + \binom{n}{4}\cos^{n-4}t\sin^4 t - \ldots = \cos^n t - \binom{n}{2}\cos^{n-2}t(1-\cos t) + \binom{n}{4}\cos^{n-4}t\,(1-\cos^2 t)^2 - \ldots$, rezultă pentru coeficientul lui x^n suma $1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = 2^{n-1}$]; în acest caz avem $T_n(1) = \dfrac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos 1) = \dfrac{1}{2^{n-1}}\cos 0 = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Polinoamele Cebîşev prezintă o importanţă deosebită în teoria celei mai bune aproximări datorită faptului că în mulţimea $\{R_n\}$ a polinoamelor de grad n în care coeficientul lui x^n este egal cu unitatea $R_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$ polinomul T_n exprimat prin (14.33') realizează minimul aplicaţiei

$$F : \{R_n\} \to \mathbb{R}_+,\quad F(R_n) = |R_n|,$$

adică $\min\limits_{\{R_n\}} F(R_n) = F(T_n)$. Într-adevăr, din (14.33') rezultă $|T_n(x)| \leqslant 2^{1-n}$, dacă $x \in [-1, +1]$, iar valorile extreme $\pm 2^{1-n}$ se ating în punctele $x_k^{(n)} = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, între două puncte extreme succesive ale lui T_n aflîndu-se un zero al acestui polinom, aceste zerouri vor fi evident $x_j^{(n)} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + j\dfrac{\pi}{n}\right)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Nu mai pot exista şi alte puncte din $[-1, +1]$ în care T_n îşi atinge valorile extreme, în afară de $x_k^{(n)}$, deoarece în caz contrar T_n s-ar anula de $n+1$ ori.

Fie R_n^* un polinom de forma $x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n$ care în intervalul $[-1, +1]$ verifică inegalităţile $R_n^*(x_0^{(n)}) \leqslant T_n(x_0^{(n)})$, $R_n^*(x_1^{(n)}) \geqslant T_n(x_1^{(n)}), \ldots$; deoarece diferenţa $Q_n = T - R_n^*$ este un polinom de grad cel mult $n-1$, dacă $Q_n(x_0^{(n)}) > 0$, $Q_n(x_1^{(n)}) < 0, \ldots$ rezultă că Q_n ar avea n zerouri în $[-1, +1]$, ceea ce nu este posibil. Dacă $Q_n(x_0^{(n)}) = 0$ şi în celelalte puncte $x_k^{(n)}$, $k > 1$, am avea şirul anterior de inegalităţi stricte şi s-ar obţine din nou n zerouri pentru Q_n; în mod analog se arată că inegalităţile $R_n^*(x_k^{(n)}) \leqslant T_n(x_k^{(n)})$, fie că sînt stricte sau nu, antrenează în orice caz $R_n^* = T_n$.

Un calcul simplu conduce la expresia funcţiei generatoare a polinoamelor Cebîşev; funcţia K definită prin relaţia (14.11) conduce la o expresie complicată ca şi particularizarea lui p şi q în funcţia generatoare a polinoamelor Jacobi, dar deoarece egalitatea (14.33') este extrem de elementară, se poate determina K prin însumare directă:

$$K(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n T_n(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^n \cos(n\arccos x) =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^n \mathrm{cis}\,(n\arccos x) = 2\mathrm{Re}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{t}{2}\,\mathrm{cis}\,(\arccos x)\right] =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1-\dfrac{t}{2}\,\mathrm{cis}(\arccos x)} =$$

$$\frac{2\left[1-\dfrac{t}{2}\cos(\arccos x)\right]}{\left[1-\dfrac{t}{2}\cos(\arccos x)\right]^2+\left[\dfrac{t}{2}\sin(\arccos x)\right]^2} = \frac{2-tx}{1-tx+\dfrac{1}{4}t^2}.$$

În sfîrșit, relația de recurență stabilită prin teorema 14.2, d) ia o formă simplă în cazul polinoamelor Cebîșev, deoarece acestea fiind funcții pare dacă n este par și funcții impare dacă n este impar, după cum se constată direct din (14.33′), vor fi de forma

$$T_{n+1}(x) = x^{n+1} + c\,x^{n-1} + \ldots,\quad T_n(x) = x_n + dx^{n-2} + \ldots$$

și deci polinomul $T_{n+1}(x) - x\,T_n(x)$ va fi un polinom de grad $n-1$, care conform cu relația de recurență amintită va diferi de polinomul T_{n-1} printr-o constantă. Deci

$$T_{n+1}(x) - x\,T_n(x) = (c-d)x^{n-1} + \ldots = (c-d)\;T_{n-1}(x)$$

iar deoarece $T_n(1) = 2^{1-n}$, rezultă $c-d = -\dfrac{1}{4}$ și relația de recurență se va scrie în definitiv

$$4T_{n+1}(x) - 4xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0.$$

14.8. Polinoamele Laguerre

În cazul în care intervalul de ortogonalitate J este $]0, +\infty[$ iar ponderea ρ este egală cu $x^\lambda \exp(-x)$, șirul de polinoame ortogonale se notează prin $(L_n^{(\lambda)})_{n\in\mathbb{Z}_+}$ iar $L_n^{(\lambda)}$ este *polinomul Laguerre* de grad n; în această situație λ este un parametru real iar deoarece din raportul $\dfrac{\rho'}{\rho}$ rezultă $\alpha(x) = \lambda - x$, $\beta(x) = x$ (deci $\deg\alpha = 1$,

$\deg\beta = 1$). Pentru a avea $(\rho\beta)(0) = (\rho\beta)(+\infty) = 0$, deoarece $(\rho\beta)(x) = x^{\lambda+1}\exp(-x)$, este necesar să presupunem $\lambda > -1$. Calcule elementare arată că $L_n^{(\lambda)}$ verifică ecuația diferențială

$$xy'' + (\lambda + 1 - x)\,y' + ny = 0, \tag{14.34}$$

a cărei soluție liniar independentă de $L_n^{(\lambda)}$ poate fi funcția

$$L_n^{(\lambda)}(x)\int_{x_0}^{x} t^{\lambda-1}\exp(-t)[L_n^{(\lambda)}(t)]^{-2}\,\mathrm{d}t,$$

care, evident, nu poate fi un polinom. Expresia explicită a polinomului $L_n^{(\lambda)}$ va fi

$$L_n^{(\lambda)}(x) = A_n\,x^{-\lambda}\exp(x)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[x^{\lambda+n}\exp(-x)],\quad n\in\mathbb{Z}_+, \tag{14.35}$$

în care factorul de proporționalitate A_n se consideră egal cu unitatea, $A_n = 1$, ceea ce corespunde la condiția de normare

$$L_n^{(\lambda)}(0) = (\lambda+1)_n = \frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda+1)}.$$

În aceste ipoteze, funcția generatoare K, în baza teoremei 14.3, va fi egală cu $\dfrac{\rho(t_1)}{\rho(x)}\dfrac{1}{1-t}$, unde t_1 este zeroul polinomului $z - c - t\,\beta(z)$, deci $t_1 = \dfrac{x}{1-t}$, ceea ce conduce la egalitatea

$$K(x,t) = (1-t)^{\lambda-1}\exp\left(\frac{xt}{t-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}L_n^{(\lambda)}(x)t^n, \tag{14.36}$$

care arată că $L_n^{(\lambda)}(0)$ trebuie să fie egal cu valoarea anterioară $\dfrac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda+1)}$.

În ipoteza că $A_n = 1$, din (14.35) rezultă

$$(L_n^{(\lambda)},\ L_m^{(\lambda)})_\rho = \delta_{nm}\Gamma(n+1)\ \Gamma(\lambda+n+1),\quad n\in\mathbb{Z}_+,\ \rho(x) = x^\lambda\exp(-x), \tag{14.37}$$

deoarece

$$(L_n^{(\lambda)},\ L_n^{(\lambda)})_\rho =$$

$$= \int_0^\infty x^\lambda \exp(-x) L_n^{(\lambda)}(x) x^{-\lambda} \exp(x) \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} [x^{\lambda+n} \exp(-x)]\, \mathrm{d}x =$$

$$= (-1)^n [L_n^{(\lambda)}(x)]^{(n)} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^{\lambda-n}\, \mathrm{d}x,$$

dacă se ţine seama de faptul că prin integrări succesive prin părţi, termenii integraţi dispar. Din dezvoltarea în serie (14.36), derivînd termen cu termen de n ori, rezultă egalitatea

$$(-1)^n (1-t)^{-n-\lambda-1} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [L_n^{(\lambda)}(x)]^{(n)} t^n$$

care arată că $[L_n^{(\lambda)}]^{(n)} = n!\,(-1)^n$. Relaţia (14.37) este demonstrată deoarece

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^{\lambda+n} \mathrm{d}x = \Gamma(\lambda + n + 1).$$

Comparînd ecuaţia diferenţială (14.34) cu ecuaţia Gauss confluentă (vezi cap. 12), se obţine $a = -n$, $c = 1 + \lambda$, ceea ce înseamnă că de fapt polinoamele lui Laguerre sînt polinoamele cele mai generale care se pot obţine din funcţia (seria) hipergeometrică degenerată definită în cap. 12 şi, prin urmare, va avea loc egalitatea

$$L_n^{(\lambda)}(x) = B_n\, {}_1F_1(-n;\ 1+\lambda;\ x),$$

factorul de proporţionalitate B_n determinîndu-se imediat, dacă ţinem seama că ${}_1F_1(a; c; 0) = 1$ iar $L_n^{(\lambda)}(0) = (\lambda+1)_n$; deci $B_n = (\lambda+1)_n$ şi în locul egalităţii (14.35) cu $A_n = 1$ se poate utiliza şi egalitatea

$$L_n^{(\lambda)}(x) = (\lambda+1)_n\, {}_1F_1(-n;\ \lambda+1;\ x). \qquad (14.35')$$

O altă egalitate utilă în cazuri concrete este exprimată prin relaţia

$$L_n^{(\lambda)}(x) = (\lambda+1)_n\, x^{-\frac{\lambda+1}{2}} \exp\left(\frac{x}{2}\right) M_{n+\frac{\lambda+1}{2},\ \frac{\lambda}{2}}(x), \qquad (14.35'')$$

unde $M_{k,m}$ este funcţia definită în exerciţiul 4 de la cap. 12.

Strîns legate de polinoamele Laguerre sînt *funcţiile Laguerre*

$$\varphi_n^{(\lambda)}(x) = x^{\frac{\lambda}{2}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) L_n^{(\lambda)}(x), \quad n \in \mathbb{Z}_+,\ \lambda \geqslant 0, \qquad (14.36)$$

care au unele proprietăţi importante : sînt finite în origine şi nule la $+\infty$ (din cauza exponenţialei) iar $(\varphi_n^{(\lambda)})_{n\in\mathbb{Z}_+}$ formează un şir ortogonal pe $[0, +\infty[$ cu ponderea $\rho(x) = 1$, deoarece

$$(\varphi_n^{(\lambda)},\ \varphi_m^{(\lambda)}) = \int_0^\infty \varphi_n^{(\lambda)}(x)\, \varphi_m^{(\lambda)}(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^\infty x^\lambda \mathrm{e}^{-x} L_n^{(\lambda)}(x) L_m^{(\lambda)}(x)\, \mathrm{d}x =$$

$$= \delta_{nm}\, \Gamma(n+1)\, \Gamma(n+\lambda+1).$$

Şirul ortonormal corespunzător va fi

$$\psi_n^{(\lambda)}(x) = \frac{\varphi_n^{(\lambda)}(x)}{\sqrt{n!}\ \sqrt{\Gamma(\lambda+n+1)}},$$

pentru care $(\psi_n^{(\lambda)},\ \psi_m^{(\lambda)}) = \delta_{nm}$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$.

Scriind ecuaţia diferenţială (14.34) sub forma autoadjunctă, deci sub forma $(x^{\lambda+1}\mathrm{e}^{-x}y')' + nx^\lambda \mathrm{e}^{-x} y = 0$, în baza relaţiei (14.36) se deduce uşor că funcţiile Laguerre verifică o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul al doilea.

14.8. Polinoamele Hermite

Definind *polinoamele Hermite* ca polinoame ortogonale pe $\mathbb{R}$ cu pondere $\exp(-x^2)$, rezultă $\alpha(x) = -2x$, $\beta(x) = 1$ (deci deg $\alpha = 1$, deg $\beta = 0$) şi de aceea, notînd cu H_n polinomul Hermite de grad n, vom avea

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} [\exp(-x^2)], \quad n \in \mathbb{Z}_+, \qquad (14.37)$$

factorul de proporționalitate fiind ales astfel încît să se verifice condiția de normare

$$H_{2n}(0) = (-1)^n,\ H_{2n+1}(0) = 0,\ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{14.37'}$$

Va rezulta ecuația diferențială

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \tag{14.38}$$

verificată de H_n iar funcția generatoare se deduce imediat [deoarece $t_1 = x - t$, iar $\frac{\rho(t_1)}{\rho(x)} = \exp\ (2xt - t^2)$] și condiția de normare (14.37') se verifică dacă se scrie

$$\exp(2xt - t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n. \tag{14.39}$$

Pentru a justifica expresia (14.37) pentru H_n, se poate utiliza faptul că din (14.39) rezultă că H_n este coeficientul lui $\frac{t^n}{n!}$ din dezvoltarea Taylor a funcției $\exp(2xt - t^2)$, deci

$$H_n(x) = \frac{\partial^n}{\partial t^n}[\exp(2xt - t^2)]\Big|_{t=0} = \exp(+x^2)\frac{\partial^n}{\partial t^n}\exp[-(t-x)^2]\Big|_{t=0} =$$

$$= (-1)^n \exp(+x^2)\frac{\partial^n}{\partial x^n}\exp[-(t-x)^2]\Big|_{t=0} =$$

$$= (-1)^n \exp(x^2)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\exp(-x^2),$$

dacă se folosește faptul că $\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial x}$, cu $f = f(t-x)$. Din (14.39) rezultă egalitatea $H_n^{(n)}(x) = 2^n \cdot n!$, care permite să se scrie și relația de ortogonalitate sub forma

$$(H_n, H_m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\mathrm{d}x = \delta_{nm}\ 2^n n!\ \sqrt{\pi}. \tag{14.40}$$

Cu ajutorul polinoamelor Hermite se pot defini *funcțiile Hermite* $\mathscr{H}_n$, punînd

$$\mathscr{H}_n(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) H_n(x),\ n \in \mathbb{Z}_+,$$

care au ca însușire principală faptul că sînt nule cînd $x \to \pm\infty$ și formează un șir ortogonal cu pondere $\rho(x) = 1$ pe $\mathbb{R}$; relația (14.40) se poate transcrie sub forma echivalentă

$$(\mathscr{H}_n,\ \mathscr{H}_m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{H}_n(x)\ \mathscr{H}_m(x)\ \mathrm{d}x = \delta_{mn}\ 2^n n!\sqrt{\pi}.$$

În același timp funcția $\mathscr{H}_n$ verifică ecuația diferențială $y'' + (1 - x^2 + 2n)y = 0$, după cum se poate constata ușor prin efectuarea transformării $y \to \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)y$ în ecuația (14.38).

Pentru polinoamele Hermite se pot deduce ușor următoarele relații de recurență:

$$H_n' = 2n\ H_{n-1},\ H_n(x) - 2xH_{n-1}(x) + 2(n-1)\ H_{n-2}(x) = 0. \tag{14.41}$$

Prima relație se obține derivînd ecuația (14.38) în raport cu x; se obține ecuația $(y')'' - 2x(y')' + 2(n-1)y' = 0$, care, fiind verificată de către H_{n-1}, arată că $H_n' = CH_{n-1}$, unde constanta C se poate determina, utilizînd de exemplu condiția $H_n^{(n)}(x) = 2^n \cdot n!$, adică $H_n(x) = 2^n x^n + \ldots$ și $H_{n-1}(x) = 2^{n-1} x^{n-1} + \ldots$, deci se obține egalitatea $n \cdot 2^n = C \cdot 2^{n-1}$, adică $C = 2n$.

A doua relație de recurență, care este de fapt relația stabilită prin teorema 14.2, d), se poate obține ușor scriind

$$H_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2}(\mathrm{e}^{-x^2})^{(n)} = (-1)^n\ \mathrm{e}^{x^2}\ (-2x\ \mathrm{e}^{-x^2})^{(n-1)}$$

și aplicînd regula lui Leibniz de derivare a unui produs; se va obține egalitatea

$$H_n(x) = -2x(-1)^n\ \mathrm{e}^{x^2}\ (\mathrm{e}^{-x^2})^{(n-1)} - 2(-1)^n\ \mathrm{e}^{x^2}\ (n-1)\ (\mathrm{e}^{-x^2})^{(n-2)}$$

care coincide cu a doua relație (14.41).

Se poate stabili o legătură simplă între polinoamele Laguerre și polinoamele Hermite; astfel, dacă în ecuația Gauss confluentă

$xy'' + (c - x)y' - ay = 0$ se efectuează schimbarea de variabilă $x = t^2$, se va obține ecuația diferențială

$$\ddot{y} + \left(\frac{2c-1}{t} - 2t\right)\dot{y} - 4ay = 0, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt},$$

și care deci va coincide cu ecuația (14.38) a polinoamelor Hermite dacă $c = \frac{1}{2}$ și $a = -\frac{n}{2}$.

Așadar, dacă n este un număr par, $n = 2k$, avem $a = -k \in \mathbb{Z}_+$ și rezultă egalitatea

$$H_{2k}(x) = B_k\ {}_1F_1\left(-k; \frac{1}{2}; x^2\right) = (-1)^k {}_1F_1\left(-k; \frac{1}{2}; x^2\right), \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

determinarea valorii $(-1)^k$ pentru B_k rezultînd din (14.37') și din egalitatea ${}_1F_1(a; c; z) = 1$ pentru $z = 0$; dacă n este impar, polinomul Hermite H_n se poate obține cu ajutorul primei relații de recurență (14.41) și prin urmare

$$H_{2k-1}(x) = \frac{1}{4k} H'_{2k}(x) = \frac{(-1)^k}{4k} \frac{d}{dx}\left[{}_1F_1\left(-k; \frac{1}{2}; x^2\right)\right], \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Așadar, polinoamele lui Hermite se pot exprima cu ajutorul polinoamelor Laguerre $L_n^{(\lambda)}$ în care $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Exerciții și completări

1°. Dacă P_n este polinomul Legendre de gradul n, să se stabilească egalitățile

$$\int_{-1}^{+1} xP_j(x)\, P_{j+1}(x)\, dx = \frac{j+1}{(2j+1)(2j+3)}; \quad \int_{-1}^{+1} x^2 P_{j-2}(x)\, P_j(x) =$$

$$= \frac{2j(j-1)}{(2j-3)(2j+1)}; \quad \int_{-1}^{+1} (1-x^2) P_j^2(x)\, dx = \frac{2j(j+1)}{2j+1}.$$

Indicație. Se folosește faptul că $xP_j(x)$ și $x^2P_{j-2}(x)$ sînt polinoame de grad $j+1$, respectiv j, deci se pot scrie sub formă de combinații liniare de $P_0, \ldots, P_{j+1}$, respectiv

$P_0, \ldots, P_j$ iar la ultima integrală se utilizează ecuația diferențială verificată de P_j și o integrare prin părți.

2°. Să se arate că șirul $\left(\frac{d^j}{dx^j} J_n^{(p,q)}(x)\right)_{n \geqslant j}$ este tot un șir de polinoame ortogonale; să se determine ponderea și intervalul de ortogonalitate.

Indicație. Se derivează de j ori ecuația verificată de $J_n^{(p,q)}$ și se compară ecuația obținută cu aceeași ecuație; se obține $[J_n^{(p,q)}]^{(j)} = A\, J_{n-j}^{(p+j)b+j)}$.

3°. Să se arate că $(H_n^{(k)})$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $k = 0, 1, \ldots, n$, formează un șir ortogonal; să se determine ponderea și intervalul de ortogonalitate.

Indicație. Se iterează egalitatea $H'_n = 2nH_{n-1}$; deci $H''_n = 2nH'_{n-1} = 2n \cdot 2(n-1)H_{n-2}$ etc.

4°. Dacă $(P_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ este șirul polinoamelor Legendre, să se stabilească egalitățile

$$x^{2m} = \frac{1}{2m+1} P_0(x) + \sum_{k=1}^{m} (4k+1) \frac{2m(2m-2)\ldots(2m-2k+2)}{(2m+1)(2m+3)\ldots(2m+2k+1)} P_{2k}(x),$$

$$x^{2m+1} = \frac{3}{2m+3} P_1(x) + \sum_{k=0}^{m} (4k+3) \frac{2m(2m+3)\ldots(2m-2n+2)}{(2m+3)(2m+5)\ldots(2m+2k+3)} P_{2k+1}(x).$$

Indicație. Se aplică metoda inducției complete.

5°. Dacă $Q_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ este un șir ortogonal de polinoame, $\deg Q_n = n$, pentru care este valabilă relația de recurență

$$Q_{n+1}(x) = (a_{n+1}x + b_{n+1})\, Q_n(x) - c_{n+1}\, Q_{n-1}(x),$$

atunci $c_{n+1}\, a_n = a_{n+1}$ și este valabilă *identitatea Christoffel-Darboux*:

$$a_{n+1}(x-t) \sum_{j=0}^{n} Q_j(x)\, Q_j(t) = Q_{n+1}(x)\, Q_n(t) - Q_{n+1}(t)\, Q_n(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Indicație. Se explicitează Q_{n+1} din relația de recurență de la teorema 14.2 și se notează cu a_{n+1}, b_{n+1} și c_{n+1} coeficienții Q_n, Q_n și $-Q_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$; înmulțind scalar cu Q_{n-1}, se obține $c_{n+1} = (Q_n, xQ_{n-1})_\rho = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, dacă xQ_{n-1} se extrage din aceeași relație de recurență scrisă pentru n în loc de $n+1$. Notînd $W_{n+1}(x, t) = Q_{n+1}(x)\, Q_n(t) - Q_{n+1}(t)\, Q_n(x)$, se poate găsi relația de recurență $\frac{1}{a_{n+1}} W_{n+1} = (x-t)Q_n(x)\, Q_n(t) + \frac{1}{a_n} W_n$ din care succesiv rezultă W_n, W_{n-1}, care conduc la relația scrisă.

6°. Să se deducă identitatea

$$\cos[(n+1)t]\cos(ns) - \cos[(n+1)s]\cos(nt) = (\cos t - \cos s)(1 + 2\sum_{j=1}^{n}\cos(jt)\cos(js)).$$

Indicație. Se utilizează identitatea Christoffel-Darboux pentru polinoamele Cebîșev.

7°. Să se deducă identitatea

$$a_{n+1}\sum_{j=0}^{n}[Q_j(x)]^2 = Q_n(x)\,Q'_{n+1}(x) - Q'_n(x)\,Q_{n-1}(x),$$

valabilă pentru orice șir $(Q_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ de polinoame ortonormale.

Indicație. În identitatea Christoffel-Darboux se împarte cu $x - t$ și se trece la limită $t\to x$.

8°. Să se arate că dacă $(Q_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ este un șir de polinoame ortogonale pe J, atunci între două zerouri consecutive ale lui Q_{n+1} se află un zero al lui Q_n.

Indicație. Dacă α și β sînt zerouri consecutive pentru Q_{n+1} (presupus normat), utilizînd exercițiul 7, rezultă $P_n(\alpha)\cdot P_n(\beta)<0$ deoarece $P'_{n+1}(\alpha)\cdot P'_{n+1}(\beta)<0$.

9°. Să se arate că

$$\int_{-1}^{+1}\frac{1}{x-t}\,[P_n(t)\,P_{n-1}(x) - P_{n-1}(t)\,P_n(x)]\,dt = -\frac{2}{n},\quad n\in\mathbb{N},$$

dacă $(P_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ este șirul polinoamelor Legendre.

Indicație. Se poate utiliza exercițiul 5, cu condiția normării lui P_n.

10°. Să se arate că dacă funcțiile R_n, $n\in\mathbb{Z}_+$, sînt definite cu ajutorul dezvoltări Taylor $(1 - 3xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(x)\,t^n$, atunci R_n este un polinom de grad n care verifică relațiile:

$$2(n+1)\,R_{n+1}(x) - 3(2n+1)\,xR_n(x) + (2n-1)\,R_{n-2}(x) = 0,$$

$$n\,R_n(x) + R'_{n-2}(x) - xR'_n(x) = 0,$$

$$(16x^3 - 4)R''_n + 96x^2\,R'_n - x(12n^2 + 24n - 91)\,R'_n - n(2n+3)(2n+9)\,R_n = 0,$$

$$n\in\mathbb{Z}_+.$$

Indicație. Se aplică procedeul de la 14.4.

11°. Să se caracterizeze șirul de polinoame

$$\left(\frac{1}{x-1}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n(x-1)\right]\right)_{n\in\mathbb{Z}_+}.$$

Indicație. Comparîndu-se cu formula Rodrigues, rezultă $\rho(x) = (x-1)$, $\alpha(x) = x + 1$, $\beta(x) = x^2 - 1$, deci este vorba de polinoamele Jacobi $J_n^{(1,0)}$.

12°. Dacă a_{n+1} este constanta care apare în identitatea Christoffel-Darboux de la exercițiul 5, să se arate că

$$|a_{n+1}|^{-1} \leqslant (\max_{a\leqslant x\leqslant b}|x|^2)^{1/2}.$$

Indicație. Avem $1 = \|Q_{n+1}\|_\rho^2 = (Q_{n+1}, Q_{n+1})_\rho$ și Q_{n+1} se înlocuiește cu ajutorul formulei de recurență; se obține

$$1 = a_{n+1}\,|(Q_{n+1}, xQ_n)_\rho| \leqslant |a_{n+1}|\,|Q_{n+1}, xQ_n)_\rho| \leqslant |a_{n+1}|\,\|Q_{n+1}\|_\rho\cdot\|xQ_n\|_\rho =$$

$$= |a_{n+1}|\,\|xQ_n\|_\rho = |a_{n+1}|\left[\int_a^b x^2 Q_n^2(x)\,\rho(x)\,dx\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant |a_{n+1}|(\max_{a\leqslant x\leqslant b}x^2)^{1/2}\left(\int_a^b \rho Q_n^2\right)^{1/2} =$$

$$= |a_{n+1}|\sqrt{\max_{a\leqslant x\leqslant b}x^2}.$$

13°. Să se arate că $C_n^{(1)}(\cos x) = \dfrac{\sin[(n+1)x]}{\sin x}$.

Indicație. Se folosește funcția generatoare

$$(1 - 2t\cos x + t^2)^{-1} = [1 - t\,\mathrm{cis}(x)]^{-1}[1 - t\,\mathrm{cis}(-x)]^{-1} =$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty} t^n\mathrm{cis}(nx)\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} t^n\mathrm{cis}(-nx)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)}(\cos x)t^n,$$

adică

$$C_n^{(1)}(\cos x) = \mathrm{cis}(nx) + \mathrm{cis}(n-2)x + \ldots + \mathrm{cis}(2-n)x + \mathrm{cis}(n-x) =$$

$$= \frac{\mathrm{cis}[(n+1)x] - \mathrm{cis}[-(n+1)x]}{\mathrm{cis}(x) - \mathrm{cis}(-x)} = \frac{\sin[(n+1)x]}{\sin(x)}.$$

CAPITOLUL 15

Sisteme complete şi sisteme închise în spaţii vectoriale. Aproximări în spaţii prehilbertiene

15.1. Sisteme complete în spaţii vectoriale normate

Dacă X este un spaţiu vectorial, atunci submulţimea nevidă $L \subset X$ se numeşte *subspaţiu vectorial* al spaţiului vectorial X, dacă din ipoteza $f,\ g \in L$ rezultă $af + bg \in L$ pentru orice f şi g şi orice scalari a şi b.

Dacă X este un spaţiu vectorial normat, atunci subspaţiul L se numeşte *închis* dacă L îşi conţine toate punctele limită; într-un spaţiu vectorial X avînd dimensiune finită se ştie că orice subspaţiu $L \subset X$ este închis, dar dacă dimensiunea lui X nu este finită, atunci pot exista subspaţii vectoriale $L \subset X$ care să nu fie închise, după cum ne arată exemplul următor.

Fie $X = C[a,\ b]$, $b - a < \infty$, $\|f\| = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|$, $f \in C[a,\ b]$, şi L este definit ca fiind mulţimea polinoamelor; evident L este un subspaţiu vectorial al lui $C[a,\ b]$, dar dacă $R_n \to g$, adică dacă $\|R_n - g\| < \varepsilon$, $n \geqslant N(\varepsilon)$, funcţia g poate să nu fie un polinom: conform cu teorema lui Weierstrass de aproximare uniformă a funcţiilor continue pe un compact prin polinoame, g poate fi orice funcţie continuă din $C[a,\ b]$.

Deoarece subspaţiile vectoriale închise joacă un rol important, vom conveni să subînţelegem în viitor prin noţiunea de subspaţiu

al unui spaţiu vectorial normat X orice subspaţiu vectorial închis al lui X.

Dacă $\{f_\alpha\} \subset X$ formează un sistem oarecare de elemente din X, prin *subspaţiu generat de sistemul* $\{f_\alpha\}$ se înţelege cel mai mic subspaţiu L (vectorial şi închis) astfel încît $\{f_\alpha\} \subset L$; L se mai numeşte şi *închiderea liniară* a sistemului $\{f_\alpha\}$.

Dacă $V \subset X$ are proprietatea $af + bg \in V$ odată cu f, g, fără ca V să fie o mulţime închisă, atunci V se numeşte *varietate liniară* a spaţiului vectorial normat X.

Prin definiţie, un sistem $\{f_\alpha\}$ de elemente ale spaţiului vectorial normat X este un *sistem complet* în X dacă închiderea liniară a acestui sistem coincide cu X.

Ca exemplu, se poate considera sistemul $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, care va fi (în baza teoremei de aproximare Weierstrass) un sistem complet în $C[a,\ b]$, $b - a < \infty$ (înţelegînd prin $C[a,\ b]$ spaţiul funcţiilor continue pe intervalul mărginit $[a,\ b]$ în care $\|f\| = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

Dacă X este un spaţiu prehilbertian, deci $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$, un rol important îl joacă sistemele $\{f_\alpha\} \subset X$ ortogonale (sau ortonormale), adică $\|f_\alpha\| > 0$ iar $(f_\alpha, f_\beta) = 0$ pentru $\alpha \neq \beta$; dacă sistemul ortogonal $\{f_\alpha\}$ din X este complet, atunci acest sistem se numeşte *bază ortogonală* din X. Evident (vezi 14.1) cu acelaşi grad de generalitate sistemele ortogonale pot fi înlocuite prin sisteme ortonormale [cînd $(f_\alpha, f_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$], în care caz, dacă sistemul este complet, se va numi *bază ortonormală*.

În 14.1 s-a arătat că orice sistem liniar independent de elemente din X (considerat spaţiu prehilbertian) este echivalent cu un sistem ortonormal. Dacă într-un spaţiu metric $(S,\ d)$ există o *submulţime numărabilă densă* în S, atunci acest spaţiu metric se numeşte *separabil*.

Dacă H este un spaţiu prehilbertian separabil, atunci în H se poate întotdeauna construi o bază ortonormală, deoarece dacă $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este şirul dens în H (care există în baza ipotezei de separabilitate), atunci, fără a se micşora generalitatea, se poate presupune şirul liniar independent; în caz contrar se elimină din şir elementele care se pot scrie sub formă de combinaţii liniare, astfel: dacă $g_1, g_2, \ldots, g_p$ sînt liniar independente iar $g_{p+1} = \sum\limits_{k=1}^{p} a_k g_k$, atunci se scoate g_{p+1} din şir şi se continuă cu g_{p+2} etc. Aplicînd teorema 14.1, se obţine o bază ortonormală din H.

15.2. Aproximări în spații prehilbertiene. Sisteme ortogonale închise

Fie $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sistem ortonormal din spațiul prehilbertian H și fie f un element oarecare din H; deoarece produsele scalare (f, g_n) se pot calcula pentru orice $n \in \mathbb{N}$, vom nota

$$a_k = (f, g_k), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{15.1}$$

iar șirul $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{C}$ poartă denumirea de *șirul coordonatelor* sau *coeficienții Fourier* ai elementului f în raport cu sistemul ortonormal $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Cu ajutorul coeficienților (15.1) și al șirului ortonormal $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ se poate construi seria (formală deocamdată)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k g_k = \sum_{k=1}^{\infty} (f, g_k) g_k, \tag{15.2}$$

care se numește *seria Fourier* a elementului $f \in H$ în raport cu sistemul ortonormal $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Problema principală care trebuie rezolvată este aceea a convergenței seriei Fourier (15.2) către elementul f, convergența fiind înțeleasă în sensul metricei din H; în momentul stabilirii convergenței seriei (15.2), aceasta încetează să mai fie o serie formală.

Pentru a da un răspuns la această întrebare, vom rezolva inițial o altă problemă și anume problema celei mai bune aproximări a elementelor din H prin combinații liniare formate cu ajutorul elementelor din șirul ortonormal $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$; altfel spus, dacă $f \in H$, se formează combinația liniară $\sum_{k=1}^{n} c_k g_k = c_1 g_1 + \ldots + c_n g_n$ și vom nota prin $\delta_n(f; c_1, \ldots, c_n)$ eroarea (în normă) care apare cînd se înlocuiește f prin $\sum_{k=1}^{n} c_k g_k$, deci

$$\delta_n(f; c_1, \ldots, c_n) = \left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k g_k \right\|. \tag{15.3}$$

Deci $\delta_n(f; c_1, \ldots, c_n)$ este distanța dintre f și combinația liniară

$\sum_{k=1}^{n} c_k g_k$ iar în momentul în care dorim ca aproximarea să fie cea mai bună, evident, trebuie calculat minimul distanței dintre f și $\sum_{k=1}^{n} c_k g_k$, considerînd că δ_n depinde de coeficienții $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Teorema 15.1. *Eroarea* $\delta_n = \delta_n(f; c_1, \ldots, c_n)$ *este minimă dacă combinația liniară* $\sum_{k=1}^{n} c_k g_k$ *coincide cu suma parțială* $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k g_k$ *a seriei Fourier* (15.2).

⌜ Calculînd $\|f - \sum_{k=1}^{n} c_k g_k\|^2$, avem

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k g_k \right\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{n} c_k g_k,\ f - \sum_{j=1}^{n} c_j g_j \right) =$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k (g_k, f) - \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j (f, g_j) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_k \bar{c}_j (g_k, g_j) =$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} (c_k \bar{a}_k + \bar{c}_k a_k) + \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2,$$

dacă se utilizează (15.1) și ortogonalitatea șirului $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$; adunînd și scăzînd termenul $\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} |(f, g_k)|^2$, se poate scrie egalitatea

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k g_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |c_k - a_k|^2,$$

deoarece $|c_k - a_k|^2 = (c_k - a_k)(\bar{c}_k - \bar{a}_k) = |c_k|^2 + |a_k|^2 - c_k \bar{a}_k - a_k \bar{c}_k$, care arată clar că δ_n va fi minim dacă ultima sumă dispare (diferența $\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2$ nu depinde de alegerea constantelor $c_1, c_2, \ldots, c_n$) deci dacă $c_k = a_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. ⌟

Din punct de vedere geometric, teorema 15.1 are interpretarea următoare: elementul $f - \sum_{k=1}^{n} c_k g_k = f_n$ este ortogonal pe subspațiul

generat de elementele $g_1, g_2, \ldots, g_n$ din şirul ortonormal dat dacă şi numai dacă $c_k = a_k = (f, g_k)$, deoarece $(f_n, g_j) = (f, g_j) - \sum_{k=1}^{n} c_k (g_k, g_j) = a_j - c_j$, deci se obţine o generalizare a rezultatului binecunoscut din geometria elementară care afirmă că lungimea perpendicularei dusă printr-un punct exterior unei drepte este minimă în raport cu lungimea oricărei oblice duse din acel punct la dreapta considerată; rolul punctului este jucat de f iar rolul dreptei — de subspaţiul generat de $g_1, \ldots, g_n$.

Teorema 15.2. *Pentru orice $f \in H$ şi orice şir ortonormal $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ din H, coeficienţii Fourier* (15.1) *sînt astfel încît seria cu termeni nenegativi $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(f, g_k)|^2$ este convergentă şi se verifică inegalitatea lui Bessel*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leqslant \|f\|^2. \tag{15.3}$$

⌜ Din demonstraţia teoremei 15.1 rezultă

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k g_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2$$

şi deci $\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \geqslant 0$ sau $\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leqslant \|f\|^2$; această inegalitate arată că sumele parţiale ale seriei cu termeni nenegativi $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ sînt mărginite superior, ceea ce înseamnă că seria este convergentă iar suma ei nu poate depăşi marginea superioară $\|f\|^2$. ⌟

Dacă şirul $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nu este ortonormal ci numai ortogonal, atunci şirul $\left(\frac{g_n}{\|g_n\|} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ va fi ortonormal, iar coeficienţii Fourier vor fi $a_k = \left(f, \frac{g_k}{\|g_k\|} \right) = \frac{(f, g_k)}{\|g_k\|}$, ceea ce antrenează înlocuirea seriei Fourier (15.2) prin seria

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{g_k}{\|g_k\|} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\|g_k\|^2} (f, g_k) g_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k g_k, \quad b_k = \frac{(f, g_k)}{\|g_k\|^2}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{15.2'}$$

precum şi înlocuirea inegalităţii Bessel (15.3) prin inegalitatea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\|g_k\|^2} |(f, g_k)|^2 \leqslant \|f\|^2 \text{ sau } \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|^2 |b_k|^2 \leqslant \|f\|^2,$$

$$b_k = \frac{(f, g_k)}{\|g_k\|^2}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{15.3'}$$

Din punct de vedere geometric, inegalitatea Bessel (15.3) arată că suma pătratelor proiecţiilor vectorului f pe direcţiile $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ortogonale două cîte două nu poate depăşi lungimea vectorului f.

Sistemul ortonormal $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ din H se spune că este un *sistem închis* în spaţiul prehilbertian H, dacă pentru orice $f \in H$ are loc egalitatea

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(f, g_k)|^2 = \|f\|^2, \tag{15.4}$$

numită *relaţia (egalitatea) lui Parseval.*

Teorema 15.3. *Seria Fourier $\sum_{k=1}^{\infty} (f, g_k) g_k$ relativă la sistemul ortonormal $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ din H este convergentă către $f \in H$ dacă sistemul considerat este un sistem închis în H.*

⌜ Notînd $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k g_k$, şirul $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ va fi şirul sumelor parţiale ale seriei Fourier (15.2); din demonstraţia teoremei 15.1 rezultă egalitatea $\|f - s_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2$, care arată că dacă se verifică (15.4), atunci $\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \to 0$ cînd $n \to \infty$ şi deci $\|f - s_n\| \to 0$ cînd $n \to \infty$, ceea ce este echivalent cu egalitatea $\sum_{k=1}^{\infty} a_k g_k = f$. ⌟

Reciproca teoremei 15.3 se poate formula astfel:

Dacă pentru un şir $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ortonormal din H seria Fourier $\sum_{k=1}^{\infty} (f, g_k) g_k$ converge către f, oricare ar fi $f \in H$, atunci sistemul $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$

este un sistem închis în H [deoarece dacă $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k g_k \to f$, $a_k = (f, g_k)$, avem $\|f - s_n\|^2 \to 0$ $(n \to \infty)$ și cum $\|f - s_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2$, avem $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \|f\|^2$].

Între noțiunea de sistem închis și noțiunea de sistem complet definită la 15.1 există o legătură strînsă, exprimată prin rezultatul următor:

Teorema 15.4. *Dacă* H *este un spațiu prehilbertian separabil, atunci orice sistem închis din* H *este complet și reciproc.*

⌜ Fie $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un sistem închis în H; aceasta înseamnă că pentru orice $f \in H$, șirul sumelor parțiale ale seriei Fourier relative la f converg către f, ceea ce este echivalent cu faptul că mulțimea combinațiilor liniare formate cu elementele șirului $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ este densă în H.

Pentru orice $f \in H$ și orice $\varepsilon > 0$, găsim $n = n(\varepsilon)$ astfel încît $\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k g_k \right\| < \varepsilon$ [nu avem decît să luăm $c_k = a_k = (f, g_k)$].

Reciproc, dacă sistemul ortonormal $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ din H este complet, pentru orice $\varepsilon > 0$, găsim $n = n(\varepsilon)$, astfel încît $\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k g_k \right\| < \varepsilon$ oricare ar fi $f \in H$; or, deoarece $\left\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k g_k \right\| \leqslant \left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k g_k \right\|$ [expresia $\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k g_k \right\|$ este minimă cînd $c_k = a_u = (f, g_k)$, conform cu teorema 15.1], rezultă $\left\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k g_k \right\| < \varepsilon$, ceea ce înseamnă că pentru orice $f \in H$ seria Fourier $\sum_{k=1}^{\infty} a_k g_k = \sum_{k\infty 1}^{\infty} (f, g_k) g_k$ converge către f și deci șirul $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ va fi închis în H. ⌟

În cazul în care H este un spațiu Hilbert separabil, atunci este util rezultatul următor.

Teorema 15.5. *Pentru ca sistemul* $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *ortonormal din spațiul Hilbert* H *să fie închis (deci și complet) este necesar și suficient ca în* H *singurul element ortogonal pe toți* g_k, $k \in \mathbb{N}$, *să fie elementul nul.*

⌞ Dacă $(f, g_k) = 0$, $k \in \mathbb{N}$, atunci dacă $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ este un șir închis, din egalitatea lui Parseval rezultă $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(f, g_k)|^2 = 0$, adică $f = 0$.

Reciproc, fie sistemul ortonormal $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ din H astfel încît din $(f, g_k) = 0$, $k \in \mathbb{N}$, $f \in H$, să rezulte $f = 0$. Notînd $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k g_k = \sum_{k=1}^{n} (f, g_k) g_k$, un calcul simplu arată că $\|s_n - s_m\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |a_k|^2$ dacă $n < m$ iar în baza inegalității lui Bessel seria $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ fiind convergentă, rezultă $\sum_{k=n+1}^{m} |a_k|^2 < \varepsilon^2$, deci $\|s_n - s_m\| < \varepsilon$, $n, m \geqslant N(\varepsilon)$. Deoarece $s_n \in H$ și H este un spațiu complet, există $f_1 \in H$, $f_1 = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k g_k$ și, notînd $f^* = f - f_1$, avem $(f - f_1, g_k) = (f, g_k) - (f_1, g_k) = a_k - \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j g_j, g_k \right) = a_k - a_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$, neapărat $f^* = f - f_1 = 0$, deci $f_1 = f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, g_k) g_k$, ceea ce înseamnă că pentru orice $f \in H$ seria Fourier converge către f, adică $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ este un șir închis din spațiul Hilbert H. ⌟

15.3. Completitudinea sistemelor de polinoame ortogonale

Vom considera acum cazul particular al spațiului prehilbertian $C(\bar{I})$ al funcțiilor continue pe $\bar{I}$, unde I este un interval oarecare al axei reale, în care produsul scalar este definit cu ajutorul unei ponderi date ρ:

$$(f, g)_\rho = \int_I \rho(x) f(x) \overline{g(x)}\, dx, \quad f, g \in C(I),$$

deci $f, g : \bar{I} \to \mathbb{C}$ iar $\rho : I \to \mathbb{R}$, $\rho(x) > 0$, $x \in I$.

(Rezultatele acestea vor fi valabile și în spațiul Hilbert $\overline{C(I)} = L_2(I)$ obținut prin completare abstractă din $C(I)$).

Teorema 16.5. *Dacă* $I =]a, b[$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$, *atunci orice şir de polinoame ortogonale pe* I *este complet în* $C(\bar{I})$.

⌐ Deoarece $\bar{I}$ este un compact din $\mathbb{R}$, în baza teoremei lui Weierstrass de aproximare uniformă a funcţiilor continue prin polinoame, dacă $f \in C(\bar{I})$, atunci pentru orice $\varepsilon>0$ se poate găsi $n = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încît $\|f - R_n\| = \max_{x\in\bar{I}} |f(x) - R_n(x)| < \varepsilon$ pentru orice $x \in \bar{I}$, R_n fiind un polinom de grad n (cu coeficienţi complecşi dacă $f(x) \in \mathbb{C}$ sau cu coeficienţi reali dacă $f(x) \in \mathbb{R}$, $x \in \bar{I}$). Utilizînd teorema 14.2, R_n poate fi exprimat cu ajutorul unei combinaţii liniare a polinoamelor ortogonale $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ considerate: $R_n = \sum_{k=0}^{n} c_k Q_k$. Calculînd $\|f - R_n\|_\rho$, găsim

$$\|f - R_n\|_\rho^2 = \int_I \rho(x)|f(x) - R_n(x)|^2 \,dx \leqslant \varepsilon^2 \int_I \rho(x)\,dx = \varepsilon_1^2,$$

unde ε_1 este arbitrar odată cu ε. Rezultă $\left\|f - \sum_{k=0}^{n} c_k Q_k\right\|_\rho < \varepsilon_1$ şi deci cu atît mai mult $\left\|f - \sum_{k=0}^{n} a_k Q_k\right\|_\rho < \varepsilon_1$ (în baza teoremei 15.1), unde $a_k = \dfrac{(f, Q_k)_\rho}{\|Q_k\|_\rho^2}$. ⌙

În baza acestei teoreme putem afirma că dacă $f: \bar{I} \to \mathbb{R}$, I fiind un interval de lungime finită al axei reale, $f \in L_2(I)$, atunci seria Fourier $\sum_{k=0}^{\infty} b_k Q_k$, unde $b_k = \dfrac{(f, Q_k)_\rho}{\|Q_k\|_\rho^2}$ este convergentă în $L_2(I)$ către f. În particular $(Q_k)_{k-1\in\mathbb{N}}$ poate fi şirul polinoamelor Jacobi $(J_n^{(p,q)})_{k-1\in\mathbb{N}}$ sau cazurile particulare ale sale: polinoamele Legendre $(P_k)_{k-1\in\mathbb{N}}$, polinoamele ultrasferice $(C_k^{(\lambda)})_{k-1\in\mathbb{N}}$, polinoamele Cebîşev $(T_k)_{k-1\in\mathbb{N}}$.

Dacă însă lungimea intervalului I nu este finită, teorema 15.6 nu mai este valabilă; în cazul spaţiului Hilbert $L_2(\mathbb{R})$ al funcţiilor (reale) avînd pătratul sumabil pe dreapta numerică $\mathbb{R}$ nu se poate construi un sistem ortogonal de polinoame complet, deoarece polinoamele nu sînt elemente ale spaţiului în cauză. De aceea, în locul unui sistem de polinoame ortogonale, în cazul în care I nu are lungimea finită, vor trebui utilizate sisteme de funcţii ortogonale; aceste sisteme pot fi uşor construite utilizînd teoria polinoamelor ortogonale.

Astfel, de exemplu în cazul spaţiului $L_2(\mathbb{R}_+)$ se pot utiliza funcţiile Laguerre definite la 14.7, iar în cazul spaţiului $L_2(\mathbb{R})$ se pot utiliza funcţiile Hermite definite în 14.8.

Atît funcţiile Laguerre $\varphi_n^{(\lambda)}(x) = x^{\frac{\lambda}{2}} \exp\left(-\dfrac{x}{2}\right) L_n^{(\lambda)}(x)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, cît şi funcţiile Hermite $\mathscr{H}_n(x) = \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) H_n(x)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, pot fi obţinute prin procedeul de ortogonalizare a sistemului liniar independent de funcţii $\left(\exp\left(-\dfrac{x}{2}\right) x^{\frac{\lambda}{2}+n}\right)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ pentru funcţiile $\varphi_n^{(\lambda)}$, respectiv prin ortogonalizarea sistemului liniar independent $\left(\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) x^n\right)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ în cazul funcţiilor $\mathscr{H}_n$, în ambele cazuri ortogonalizarea realizîndu-se cu ponderea $\rho(x) = 1$. Evident, $\varphi_n^{(\lambda)} \in L_2(\mathbb{R}_+)$, $\mathscr{H}_n \in L_2(\mathbb{R})$, dar scriind $\varphi_n^{(\lambda)}(x) = 0$ dacă $x<0$, vom avea $\varphi_n^{(\lambda)} \in L_2(\mathbb{R})$, aşa că în ambele cazuri este suficient să luăm în consideraţie spaţiul $L_2(\mathbb{R})$ şi sistemul liniar independent de funcţii $(x^n h(x))_{n\in\mathbb{Z}_+}$, unde $h(x) = \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$ în cazul funcţiilor Hermite sau $h(x) = x^{\lambda/2} \exp\left(-\dfrac{x}{2}\right)$ pentru $x \geqslant 0$ şi $h(x) = 0$ pentru $x<0$ în cazul funcţiilor Laguerre.

Teorema 15.7. *Dacă* h *este măsurabilă şi aproape peste tot nenulă în orice interval de forma* $I =]a, b[$, $-\infty \leqslant a<b \leqslant +\infty$ *iar* $|h(x)| \leqslant M \exp(-\alpha|x|)$, $x \in I$, $\alpha>0$, *atunci sistemul liniar independent de funcţii* $(x^n h(x))_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *este complet în* $L_2(\mathbb{R})$.

⌐ Dacă sistemul considerat n-ar fi complet, în baza teoremei 15.6 ar exista un element $f \in L_2(\mathbb{R})$, $\|f\|>0$, astfel încît $\int_{\mathbb{R}} x^n f(x)\, h(x)\,dx = 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$; considerînd integrala $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, h(x) \exp(ix\xi)\,dx = F(\xi)$, evident F este transformata Fourier a produsului (fh) iar ipoteza $\int_{\mathbb{R}} x^n f(x) h(x)\,dx = 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, conduce la concluzia că $F^{(n)}(0) = 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, ceea ce înseamnă $F(\xi) = 0$, $\xi \in \mathbb{R}$, deoarece F este o funcţie analitică de $\zeta = \xi + i\eta$ dacă se consideră $|\eta| = |\mathrm{Im}\,\zeta| \leqslant \beta < \alpha$ în baza ipotezei impuse lui h.

Utilizînd transformarea Fourier inversă, rezultă $(f\,\hat{h})(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} F(\xi)\exp(-i\xi x)\,d\xi = 0$ și deoarece $h \neq 0$ prin ipoteză, rezultă $f(x) = 0$ aproape peste tot în $\mathbb{R}$; această contradicție demonstrează rezultatul dorit. ⌋

Nu întotdeauna însă convergența seriei Fourier (15.2) în sensul metricei din spațiul Hilbert $L_2(I)$ este suficientă pentru toate cazurile practice; uneori sînt necesare informații asupra convergenței seriei (15.2) în fiecare punct din I (sau în anumite puncte din I, ceea ce este echivalent cu răspunsul la întrebarea dacă $\sum_{k=1}^{\infty} a_k g_k(x_0) = f(x_0)$, $x_0 \in I$) sau chiar este necesară convergența uniformă a seriei Fourier (15.2) în intervalul I.

Dacă $g_k = Q_{k-1}$, $(Q_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ fiind un șir de polinoame ortonormale, atunci, dacă seria $\sum_{k=0}^{\infty} a_k Q_k$ este uniform convergentă, cum $a_k Q_k$ este o funcție continuă pe $\bar{I}$, suma seriei va fi o funcție continuă (deci nu are sens să vorbim de convergența uniformă a seriei Fourier în raport cu un șir de polinoame ortogonale decît în subintervalele din I în care f este continuă).

Un răspuns simplu la problema convergenței uniforme a seriei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k Q_k$ se poate da în ipoteza că șirul ortonormal $(Q_n)_{n=\mathbb{Z}_+}$ de polinoame verifică în plus condiția $\sum_{k=n+1}^{m} Q_k^2 \leqslant M$, $n<m$, $n, m \in \mathbb{N}$, iar M este independent de m, n și x; deoarece $|s_n(x) - s_m(x)| = \sum_{k=n+1}^{m} a_k Q_k(x)$, prin aplicarea inegalității lui Cauchy $\left|\sum_{k=p}^{q} \alpha_k \beta_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=p}^{q} |\alpha_k|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=p}^{q} |\beta_k|^2\right)^{1/2}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $p<q$, se obține

$$|s_n(x) - s_m(x)| \leqslant \left[\sum_{k=n+1}^{m} |a_k|^2 \cdot \sum_{k=n+1}^{m} |Q_k(x)|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{M}\,\sqrt{\sum_{k=n+1}^{m} |a_k|^2};$$

dar în baza inegalității lui Bessel seria $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ este convergentă, deci pentru orice $\varepsilon>0$ se poate determina $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încît

$\sum_{k=n+1}^{m} |a_k|^2 < \frac{\varepsilon^2}{M}$ pentru orice $n, m \geqslant N$. Rezultă $|s_n(x) - s_m(x)| < \varepsilon$ pentru orice $x \in I$, dacă $n, m \geqslant N = N(\varepsilon)$, ceea ce înseamnă că șirul sumelor parțiale $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ este uniform convergent în I, ceea ce este echivalent cu convergența uniformă a seriei Fourier $\sum_{k=0}^{\infty} a_k Q_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (f, Q_k)_\rho\, Q_k(x)$ către $f(x)$, $x \in I$.

În ceea ce privește convergența punctuală a seriei Fourier, se poate demonstra rezultatul următor [$f(x) \in \mathbb{R}$].

Teorema 15.8. *Dacă $f \in C(\bar{I})$ iar $(Q_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ este un șir ortonormal de polinoame, atunci, dacă pentru $x_0 \in I$ funcția*

$$g(t) = \frac{f(x_0) - f(t)}{x_0 - t}$$

verifică una din condițiile

$$\lim_{n\to\infty} (g, Q_n)_\rho = 0, \quad \|g\| < \infty, \tag{15.5}$$

și dacă $|Q_n(x_0)| \leqslant A$ (A fiind independent de n), atunci

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k Q_k(x_0) = f(x_0), \quad a_k = (f, Q_k)_\rho.$$

⌈ Evaluînd diferența $f(x_0) - s_n(x_0)$, deoarece

$$s_n(x_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q_k(x_0) = \sum_{k=0}^{n} Q_k(x_0)\int_I \rho(t) f(t) Q_k(t)\,dt =$$

$$= \int_I f(t)\left[\sum_{k=0}^{n} Q_k(x_0) Q_k(t)\right]\rho(t)\,dt,$$

se obține

$$f(x_0) - s_n(x_0) = \int_I f(x_0)\,\rho(t)\,Q_0(t)\,dt - s_n(x_0) = \quad ⌋$$

$$= \int_I [f(x_0) - f(t)] \left[\sum_{k=0}^{n} Q_k(x_0)\, Q_k(t) \right] \rho(t)\, dt =$$

$$= \int_I g(t) \left[(x_0 - t) \sum_{k=0}^{n} Q_k(x_0)\, Q_k(t) \right] \rho(t)\, dt;$$

în baza identității Christoffel-Darboux (vezi exercițiul 5, cap. 14), rezultă egalitatea

$$(x_0 - t) \sum_{k=0}^{n} Q_k(x_0)\, Q_k(t) = \frac{1}{a_{n+1}} [Q_{n+1}(x_0)\, Q_n(t) - Q_{n+1}(t)\, Q_n(x_0)],$$

$$a_{n+1} \in \mathbb{R},\ a_{n+1} \neq 0$$

și deci

$$f(x_0) - s_n(x_0) = \frac{1}{a_{n+1}} [Q_{n+1}(x_0)\, (g,\ Q_n)_\rho - Q_n(x_0)\, (g,\ Q_{n+1})_\rho].$$

Utilizînd exercițiul 12, cap. 14, dacă $I =]a, b[$ iar $b - a < \infty$, rezultă $\frac{1}{|a_{n+1}|} \leqslant C$ și în baza primei condiții (15.5) rezultă $|f(x_0) - s_n(x_0)| \to 0$ cînd $n \to \infty$, deoarece șirul $(Q_n(x_0))_{m \in \mathbb{Z}_+}$ este astfel încît $|Q_n(x))| \leqslant A$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Dacă se verifică a doua condiție (15.5), atunci conform cu inegalitatea lui Bessel, deoarece $\sum_{k=0}^{\infty} |(g, Q_k)_\rho|^2 \leqslant \|g\|_\rho^2 < \infty$, seria $\sum_{k=0}^{\infty} |(g, Q_k)_\rho|^2$ fiind convergentă, neapărat $(g, Q_k)_\rho \to 0$ cînd $k \to \infty$ și deci se verifică prima condiție (15.5). ⌟

În particular dacă $g \in L_2(I), I \subset \mathbb{R}$, pentru un x_0 fix din I, seria Fourier $\sum_{k=0}^{\infty} (f, Q_k)_\rho\, Q_k$ converge în punctul x_0 către $f(x_0)$; acest lucru se întîmplă dacă f este derivabilă în I, iar $f' \in L_2(I)$, deoarece în acest caz rezultă $\frac{f(x_0) - f(t)}{x_0 - t} = f'(\xi)$ (în baza teoremei creșterilor finite) și deci $\|g\|_\rho^2 = \int_I f'^2(\xi)\, \rho(x)\, dx < \infty$.

Dacă f are în x_0 un punct de salt, deci dacă $f(x_0+) \neq f(x_0-)$, atunci se poate demonstra egalitatea

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k Q_k(x_0) = \frac{1}{2} [f(x_0+) + f(x_0-)].$$

Exerciții și completări

1°. Dacă $(P_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ este șirul polinoamelor Legendre, să se arate că

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)P_n(0)}{2-n-n^2} P_n(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leqslant x < 0, \\ x, & 0 \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n+2)} \cdot (4n+3) P_{2n+1}(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leqslant x < 0, \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2} (A - B) \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n+2)} (4n+3) P_{2n+1}(x) + \frac{A+B}{2} =$$

$$= \begin{cases} B, & -1 \leqslant x < 0, \\ A, & 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

2°. Să se arate că dezvoltarea unei funcții $f: [-1, +1] \to \mathbb{R}$ în serie de polinoame Cebișev coincide cu dezvoltarea funcției $f(\cos t) = g(t)$, $t \in [0, \pi]$, în serie trigonometrică de cosinusuri.

Indicație. În dezvoltarea în serie după polinoamele Cebișev se face substituția $x = \cos t$ și se ține seama că $T_n(x) = 2^{1-n} \cos(n \arccos x)$, deci $T_n(\cos t) = 2^{1-n} \cos(nt)$.

3°. Scriind ecuația diferențială a polinoamelor ortogonale sub forma autoadjunctă, să se determine o soluție sub formă de serie formală Fourier în raport cu șirul de polinoame considerat a ecuației neomogene corespunzătoare.

Indicație. Ecuația diferențială fiind $\beta y'' + (\alpha + \beta')y' - n[(n+1)\beta_2 + \alpha_1]y = 0$, notînd $\lambda_n = n[(n+1)\beta_2 + \alpha_1]$, forma autoadjunctă va fi $(\rho\beta y')' - \lambda_n \rho y = 0$ iar ecuația neomogenă corespunzătoare va fi $Ly = \lambda_n \rho y + f$, cu $Ly = (\rho\beta y')'$. Scriind $y_p = \sum_{k=0}^{\infty} c_k Q_k$ și presupunînd șirul $(Q_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ ortonormal, rezultă $Ly_p = L(\Sigma c_k Q_k) = \Sigma c_k L Q_k = \rho \Sigma c_k \lambda_k Q_k$ și deci ecuația $Ly_p = \lambda_n \rho y_p + f$ se va scrie $\rho \Sigma c_k (\lambda_k - \lambda_n) Q_k = f$, de unde $c_k(\lambda_k - \lambda_n) = \frac{(f, Q_k)}{\|Q_k\|_\rho^2}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Pentru ca acest sistem să fie compatibil este necesar și suficient ca $(f, Q_n) = \int_a^b f Q_n\, dx = 0$; soluția va fi $\Sigma c_k Q_k$, $c_k = \frac{(f, Q_k)}{(\lambda_k - \lambda_n) \|Q_k\|_\rho^2}$ pentru $k \in \mathbb{Z} \setminus \{n\}$ și c_n arbitrar.

4°. În notațiile exercițiului 3, să se găsească soluția particulară a ecuațiilor $Ly = f$, $Ly - \lambda \rho y = f$, λ fiind un parametru.

Indicație. $y_p = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, Q)_\rho}{\lambda_n \|Q_n\|_\rho^2} Q_n$, C_0 fiind arbitrar, în ipoteza $\int_a^b f\, dx = 0$ (în caz contrar nu există soluție de forma specificată) în primul caz și $y_p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f, Q_n)_\rho}{(\lambda_k - \lambda) \|Q_n\|_\rho^2} Q_n$ în ipoteza $\lambda \neq \lambda_n$.

CAPITOLUL 16

Elemente din teoria stabilității

16.1. Noțiuni preliminare

Teoria stabilității soluțiilor ecuațiilor sau sistemelor diferențiale reprezintă un capitol important al matematicii moderne cu aplicații în diverse domenii ale activității practice.

Vom lua în considerație numai sistemele diferențiale liniare scrise sub forma normală, deci de forma

$$\dot{y}_j = F_j(t,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n),\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{16.1}$$

în care variabila independentă este t iar $\dot{y}_j = \dfrac{dy_j}{dt}$; forma vectorială a sistemului (16.1) va fi evident

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(t,\ \mathbf{y}),\ \text{unde}\ \mathbf{y} = [y_1,\ \ldots,\ y_n]^t,\ \mathbf{F} = [F_1,\ \ldots,\ F_n]^t. \tag{16.1'}$$

Vom presupune funcțiile F_j definite și de o clasă dată pe mulțimea $I \times \mathbb{R}^n$ și avînd valori reale, unde I este un interval din $\mathbb{R}$, de lungime finită sau nu. Fie $t_0 \in I$ și $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^n$; în baza teoremei de existență și unicitate, ale cărei ipoteze se presupun verificate în situația de față, va exista în I soluția $\tilde{\mathbf{y}}$ a ecuației vectoriale (16.1') care verifică egalitatea $\tilde{\mathbf{y}}(t_0) = \tilde{\mathbf{a}}$ și vom conveni să o numim *soluție neperturbată* a sistemului (16.1') iar orice altă soluție a sistemului considerat, corespunzînd valorilor t_0 și $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{\mathbf{a}} \neq \mathbf{a}$, se va numi *soluție perturbată* și o vom nota $\mathbf{y}$, deci $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{a}$. Soluția perturbată $\mathbf{y}$ se numește *necondiționat stabilă* sau *stabilă în sensul lui Dirichlet* dacă $I = \mathbb{R}$, $\mathbf{y}$ și $\tilde{\mathbf{y}}$ sînt definite de asemenea pe $\mathbb{R}$ și dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ se poate determina $\delta > 0$ astfel încît dacă $|\mathbf{a} - \tilde{\mathbf{a}}| < \delta$ să avem $\|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}\| < \varepsilon$, unde $\|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}\| = \max\limits_{x \in \mathbb{R}} \{|y_1(x) - \tilde{y}_1(x)|,\ \ldots,\ |y_n(x) - \tilde{y}(x)|\}$. În caz contrar, soluția perturbată y se numește *instabilă*.

În practică, însă, deoarece de obicei variabila independentă t are interpretare de timp, nu interesează valorile lui t astfel încît $t < t_0$, ci valorile lui t pentru care $t > t_0$, iar în acest caz dacă $\|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}\| < \varepsilon$, considerînd $t \geqslant t_0$, se spune că este vorba de *stabilitate pozitivă* sau de *stabilitate în sensul lui Leapunov*.

Alteori nu este necesar să avem $\max\limits_{t \in I} |y_j(t) - \tilde{y}_j(t)| < \varepsilon$ pentru orice $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, ci numai pentru anumiți indici j, ceea ce conduce la noțiunea de *stabilitate parțială* sau *stabilitate în sensul lui Routh*.

În viitor vom lua în considerație numai noțiunea de stabilitate pozitivă.

Conform cu definițiile date soluția perturbată $\mathbf{y}$ va fi *instabilă* în sensul lui Leapunov dacă pentru $\delta > 0$ arbitrar de mic, cel puțin pentru un indice j_0 avem $\max\limits_{t \geqslant t_0} |y_{j_0}(t) - \tilde{y}_{j_0}(t)| \geqslant 0$. Dacă însă, în afară de condițiile

$$|\mathbf{a} - \tilde{\mathbf{a}}| < \delta, \qquad \|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}\| < \varepsilon \tag{16.2}$$

valabile pentru $t \geqslant t_0$, se mai verifică și condițiile

$$\lim_{t \to \infty} |y_j(t) - y_j(t)| = 0, \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{16.3}$$

atunci soluția perturbată $\mathbf{y}$ se numește *asimptotic stabilă*. Evident, definițiile anterioare nu epuizează toate situațiile de stabilitate posibile.

De obicei, o problemă de stabilitate se reduce la o formă canonică, prin schimbarea de funcție necunoscută $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{x}$, care transformă ecuația vectorială (16.1') în ecuația (de asemenea vectorială).

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t,\ \mathbf{x}), \qquad \mathbf{f}(t,\ \mathbf{x}) = \mathbf{F}(t,\ \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{y}}) - \dot{\tilde{\mathbf{y}}} \tag{16.4}$$

iar soluţia neperturbată va fi soluţia banală $\mathbf{x} = 0$; în plus, deoarece $\mathbf{f}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{F}(t, \tilde{\mathbf{y}}) - \dot{\tilde{\mathbf{y}}}$, cum $\tilde{\mathbf{y}}$ este o soluţie a ecuaţiei (16.1), rezultă şi condiţia

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \tag{16.5}$$

care, evident, exprimă de fapt situaţia specială din cazul de faţă cînd $\mathbf{x} = 0$ este o soluţie a sistemului (16.4).

Dacă în (16.4) $\mathbf{f}$ nu depinde de variabila independentă t, atunci sistemul diferenţial corespunzător $\dot{x}_j = f_j(x_1, \ldots, x_n), j = 1, 2, \ldots, n$, se numeşte *sistem autonom*; scriind soluţiile unui sistem autonom sub forma $x_j = x_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, rezultă că în spaţiul variabilelor $x_1, \ldots, x_n$, denumit *spaţiul fazelor* sistemului considerat, această soluţie reprezintă din punct de vedere geometric o curbă, denumită curent *traiectorie* sau *orbită* a sistemului dat, pe care o considerăm orientată în sensul crescător al valorilor lui t.

Deoarece în sistemul (16.5) avem $\mathbf{f}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$, rezultă că $\mathbf{x} = 0$ (adică originea din spaţiul fazelor) este o soluţie a sistemului considerat, deci o traiectorie este formată dintr-un singur punct; o astfel de traiectorie se numeşte *punct staţionar* sau *soluţie de echilibru.*

Cu ajutorul noţiunii de punct staţionar, definiţia stabilităţii sau a instabilităţii se formulează astfel:

Punctul staţionar $\mathbf{x} = 0$ (*adică* $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$) *este stabil în sensul lui Leapunov, dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *se poate găsi un* $\delta > 0$, *astfel încît orice soluţie* $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ *a sistemului* (16.4) *care corespunde condiţiilor iniţiale* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, *satisfăcînd inegalităţile*

$$|a_j| < \delta, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{16.6}$$

este astfel încît sînt satisfăcute inegalităţile

$$|x_j(t)| < \varepsilon, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{16.6'}$$

pentru orice $t \geqslant t_0$. *Dacă în plus soluţia (perturbată)* $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ *verifică şi condiţia*

$$\lim_{t \to \infty} x_j(t) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{16.6''}$$

atunci soluţia este asimptotic stabilă.

Dacă pentru $\delta > 0$ *arbitrar există cel puţin un indice* j *pentru care inegalitatea* (16.6') *nu este satisfăcută, atunci punctul staţionar* $\mathbf{x} = 0$ *este instabil.*

Exemplul 1. Să considerăm sistemul autonom

$$\dot{x}_1 = x_2, \ \dot{x}_2 = x_1$$

şi soluţia $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ care verifică datele Cauchy nule $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$.

Evident această soluţie va fi $x_1(t) = 0$, $x_2(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}_+$; orice altă soluţie, care verifică datele iniţiale $x_1(0) = a_1$, $x_2(0) = a_2$ va avea forma

$$x_1(t) = a_1 \cos t - a_2 \sin t, \ x_2(t) = a_1 \sin t + a_2 \cos t$$

şi atunci, pentru a avea $|x_1(t) - 0| < \varepsilon$, $|x_2(t) - 0| < \varepsilon$, unde $\varepsilon > 0$ este arbitrar, deoarece $|x_1(t) - 0)| = |a_1 \cos t - a_2 \sin t| \leqslant |a_1 \cos t| + |a_2 \sin t| \leqslant |a_1| + |a_2|$, $|x_2(t) - 0| \leqslant |a_1| + |a_2|$ pentru orice $t \geqslant 0$, este suficient să alegem $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{2}$ pentru ca din inegalităţile $|a_1| < \delta$, $|a_2| < \delta$ să rezulte $|a_1| + |a_2| < 2\delta = \varepsilon$, ceea ce înseamnă $|x_1(t) - 0| < \varepsilon$, $|x_2(t) - 0| < \varepsilon$ şi deci soluţia banală a sistemului considerat este stabilă în sensul lui Leapunov; cum însă $\lim_{t \to \infty} x_1(x)$ şi $\lim_{t \to \infty} x_2(t)$ nu există, soluţia $\mathbf{x}(t) = 0$ nu este asimptotic stabilă.

În exemplul acesta soluţia banală este stabilă şi în sensul lui Dirichlet, deoarece calculele anterioare rămîn valabile şi pentru $t < 0$.

16.2. Clasificarea punctelor staţionare în $\mathbb{R}^2$

Fie sistemul autonom din $\mathbb{R}^2$ (P şi Q fiind funcţii reale)

$$\dot{x} = P(x, y), \ \dot{y} = Q(x, y), \ P(0, 0) = 0, \ Q(0, 0) = 0 \tag{16.7}$$

pentru care traiectoriile din planul fazelor (care aici coincide cu $\mathbb{R}^2$) sînt soluţiile ecuaţiei diferenţiale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \quad \text{sau} \quad Q(x, y)\,dx - P(x, y)\,dy = 0;$$

aceste traiectorii pot fi construite aproximativ cu ajutorul izoclinelor şi evident ne interesează traiectoriile din vecinătatea punctului staţionar $x = 0$, $y = 0$ [dacă $P(x_0, y_0) = 0$, $Q(x_0, y_0) = 0$, atunci punctul staţionar are coordonatele (x_0, y_0) şi prin translaţia

$x \to x + x_0$, $y \to y + y_0$, care nu modifică derivatele $\dot{x}$ și $\dot{y}$, acest punct staționar este plasat în origine]. Dezvoltînd în serie funcțiile P și Q, în vecinătatea punctului staționar $x = 0$, $y = 0$, se poate scrie sistemul

$$\dot{x} = ax + by + \ldots, \quad \dot{y} = cx + dy + \ldots,$$

$$a = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad c = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad d = \frac{\partial Q}{\partial y} \text{ pentru } x=0, y=0 \qquad (16.7')$$

și deoarece ne interesează soluțiile $|x|$, $|y|$ suficient de mici, vom considera, în primă aproximație, în locul sistemului (16.7'), sistemul liniar

$$\dot{x} = ax + by, \ \dot{y} = cx + dy, \ a, \ b, \ c, \ d \in \mathbb{R} \qquad (16.8)$$

[care constituie liniarizarea sistemului (16.7) dat inițial], a cărui transcriere vectorială va fi

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Az}, \ \mathbf{z} = [x, \ y]^t, \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. \qquad (16.9)$$

Vom spune că sistemul liniar (16.8) definește cele mai simple tipuri de puncte staționare din $\mathbb{R}^2$: evident punctul staționar este originea, dar vor putea exista diverse comportări ale traiectoriilor sistemului (16.8), fiecare comportare definind un anumit tip de punct staționar. Vom presupune în plus $\det \mathbf{A} \neq 0$, ceea ce face ca ecuația caracteristică a matricei $\mathbf{A}$, adică ecuația de gradul doi

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0 \qquad (16.10)$$

să nu aibă soluții nule.

Efectuînd transformarea liniară $\mathbf{z} = \mathbf{Tw}$, unde $\mathbf{T}$ este o matrice pătrată de ordinul doi, nesingulară, în locul sistemului (16.9) se poate considera sistemul echivalent

$$\dot{\mathbf{w}} = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT})\mathbf{w}, \qquad (16.9')$$

a cărui matrice $\mathbf{A}_1 = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$ are aceleași valori proprii λ_1 și λ_2 ca și matricea $\mathbf{A}$, deci vor verifica ecuația (16.10).

În corespondență cu diversele posibilități de rezolvare a ecuației (16.10), se pot deosebi următoarele situații:

I. Fie valorile proprii λ_1 și λ_2 reale și de semne contrare; atunci se poate determina matricea $T \in M_2$ astfel încît

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \operatorname{diag}[\lambda_1, \ \lambda_2]$$

și deci sistemul (16.9') va fi de forma

$$\dot{w}_1 = \lambda_1 w_1, \ \dot{w}_2 = \lambda_2 w_2.$$

Prin integrare, se va obține

$$w_1 = c_1 \exp(\lambda_1 t), \ w_2 = c_2 \exp(\lambda_2 t)$$

sau, eliminînd parametrul t (pentru a putea utiliza spațiul fazelor), va rezulta

$$w_2 = c\,|w_1|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}. \qquad (16.11)$$

Din punct de vedere geometric, deoarece $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$, în planul $\mathbb{R}^2$ raportat la axele w_1 și w_2 traiectoriile vor fi curbe asemănătoare cu hiperbolele, axele $w_1 = 0$ și $w_2 = 0$ fiind asimptote iar în planul $\mathbb{R}^2$ raportat la axele inițiale x și y vor apărea curbe de același tip dar avînd ca asimptote două drepte care trec prin punctul staționar $x = 0$, $y = 0$ (aceste asimptote fiind de forma $y = kx$, coeficientul unghiular k se determină din ecuația $k = \frac{c + k \cdot d}{a + k \cdot b}$ care în baza ipotezei inițiale are două rădăcini reale și de semne contrare în k). Rezultă că traiectoriile sistemului dat vor avea reprezentarea grafică din fig. 16.1 care arată clar că punctul staționar $x = 0$, $y = 0$ este instabil.

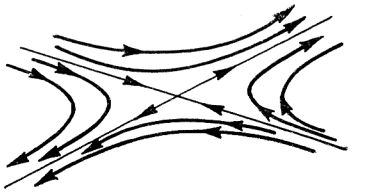

Fig. 16.1.

Pentru orice valori inițiale, soluțiile corespunzătoare nu pot verifica inegalitățile $|x| < \varepsilon$, $|y| < \varepsilon$ pentru orice t.

Un astfel de punct staționar se numește *punct de șa*.

II. Dacă valorile proprii λ_1 și λ_2 sînt reale, distincte și negative $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, atunci calculele precedente conduc la expresia (16.11)

în care $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 0$; în plus w_1 şi w_2 tind la zero cînd $t \uparrow \infty$, ceea ce are drept consecinţă faptul că traiectoriile sînt asimptotic stabile şi se prezintă ca în fig. 16.2, a.

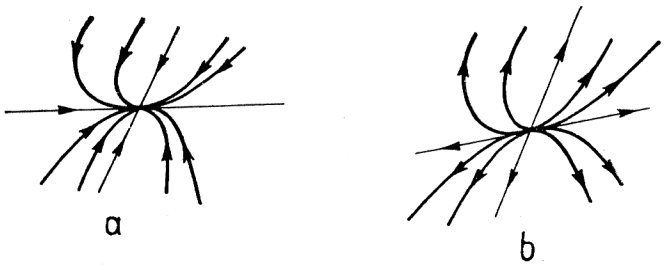

Fig. 16.2

III. Dacă $\lambda_1 > 0$ şi $\lambda_2 > 0$, cînd $t \to +\infty$, atît w_1 cît şi w_2 tind la infinit, ceea ce face ca punctul staţionar $x = 0$, $y = 0$ să fie instabil. În situaţia de faţă traiectoriile se vor prezenta ca în fig. 16.2, b.

Cazurile II şi III sînt analoage din punctul de vedere al tipului de punct staţionar pe care-l defineşte; este vorba de un *nod* (stabil în cazul II, instabil în cazul III) bidirecţional.

Cazurile I, II, III au epuizat posibilităţile de tipuri ale punctelor staţionare cînd ecuaţia (16.10) are rădăcini reale şi distincte.

Dacă $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, atunci matricea $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$ are forma canonică Jordan fie $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ fie $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$; în cazul primei forme canonice seobţine sistemul

$$\dot{w}_1 = \lambda w_1 + w_2, \quad \dot{w}_2 = \lambda w_2,$$

care conduce la soluţiile

$$w_1(t) = (c_1 + c_2 t)\exp(\lambda t), \quad w_2(t) = c_2 \exp(\lambda t),$$

adică $\lambda w_1 = w_2(\ln|w_2| + c)$.

IV. Dacă $\lambda < 0$, se obţin traiectorii de tipul celor din fig. 16.3, a: aici, cînd $t \to +\infty$, avem $w_1 \to 0$, $w_2 \to 0$; punctul staţionar $x = 0$, $y = 0$ este stabil.

V. Dacă $\lambda < 0$, traiectoriile din planul fazelor sînt trasate în fig. 16.3, b: cînd $t \to +\infty$, rezultă $w_1 \to \infty$, $w_2 \to \infty$; punctul staţionar

$x = 0$, $y = 0$ este instabil. Este clar că acest punct staţionar este tot de tip nod, dar unidirecţional.

În cazul celei de-a doua forme canonice $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ se va obţine sistemul

$$\dot{w}_1 = \lambda w_1, \dot{w}_2 = \lambda w_2,$$

ceea [ce înseamnă $w_1 = cw_2$, deoarece $w_1(t) = c_1 \exp(\lambda t)$, $w_2(t) = c_2 \exp(\lambda)t$, adică $y = cx$ (ţinînd seama că $w_j = T^{-1}z_j$, $j = 1, 2$, iar $z_1 = x, z_2 = y$).

Dacă $\lambda > 0$, reapare situaţia descrisă la cazul IV cu singura diferenţă că în locul unor curbe apar drepte care trec prin origine iar dacă $\lambda > 0$, se obţine situaţia V cu traiectorii rectilinii. Se spune că punctul staţionar este un *nod degenerat*.

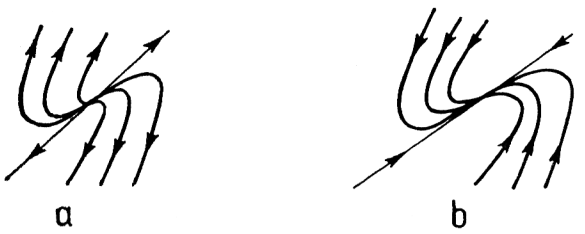

Fig. 16.3.

În fine, dacă ecuaţia (16.10) are rădăcini complexe $\lambda_1 = p + iq$, $\lambda_2 = p - iq$, $q \neq 0$, atunci $w_1 = x_1 + iy_1$ şi $w_2 = \bar{w}_1 = x_1 - iy_1$ iar sistemul $\dot{w}_1 = \lambda_1 w_1, \dot{w}_2 = \lambda_2 w_2$ care este complex, prin separarea părţilor reale şi imaginare se transformă într-un sistem pentru variabilele x_1 şi y_1:

$$\dot{x} = px_1 - qy_1, \quad \dot{y}_1 = qx_1 + py_1.$$

Prin integrare se obţine

$$x_1 = \exp(pt)\,[c_1 \cos(qt) + c_2 \sin(qt)], \quad y_1 = \frac{1}{q}(\dot{x}_1 - px_1),$$

sau, dacă se utilizează coordonatele polare în planul (x_1, y_1), $x_1 = r\cos\theta$, $y_1 = r\sin\theta$, se va obţine sistemul $\dot{r} = pr$, $\dot{\theta} = -q$, adică

$r = c \exp\left(-\frac{p}{q}\theta;\right)$ traiectoriile vor fi spirale logaritmice în planul (x_1, y_1) ca şi imaginile lor prin transformările utilizate în planul fazelor (x, y).

Se obţin următoarele situaţii:

VI. Dacă $p<0$, $q \neq 0$, deoarece $x_1 \to 0$, $y_1 \to 0$ cînd $t \uparrow \infty$, punctul staţionar $(0, 0)$ este asimptotic stabil.

VII. Dacă $p>0$, $q \neq 0$, deoarece $|x_1| \to +\infty$, $y_1 \to +\infty$ cînd $t \uparrow \infty$, punctul staţionar $(0, 0)$ este instabil.

În aceste cazuri punctul staţionar $x = 0, y = 0$ este numit *focar* (stabil în cazul VI, fig. 16.4, a, instabil în cazul VII, fig. 16.4, b).

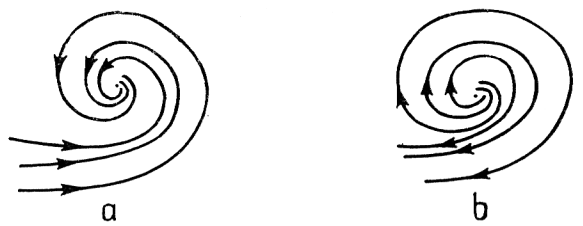

Fig. 16.4

În fine, ultima posibilitate este $\lambda_1 = iq$, $\lambda_2 = -iq$, deci $p = 0$, rădăcinile λ_1 şi λ_2 avînd partea reală nulă; se obţine uşor (conform calculelor precedente) soluţia sub formă parametrică în planul (x_1, y_1):

$$x_1 = c_1 \cos(qt) + c_2 \sin(qt),$$

$$y_1 = -c_1 \sin(qt) + c_2 \cos(qt),$$

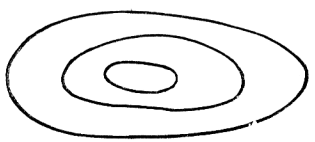

Fig. 16.5

sau xprimată în coordonate polare $\dot{r} = 0$, adică $r = \text{const}$ iar punctul staţionar $x = 0$, $y = 0$ se va numi *centru* şi va fi stabil, dar nu asimptotic stabil (fig. 16.5).

Reunind rezultatele obţinute, se poate enunţa

Teorema 16.1. *În cazul sistemului diferenţial liniar* (16.8), *în care coeficienţii* a, b, c *şi* d *sînt numere reale, verificînd condiţia* $ad - bc \neq 0$ *punctul staţionar* $x = 0$, $y = 0$ *aparţine unuia din următoarele tipuri:*

— nod, dacă $(a - d)^2 + 4bc = 0$ *sau* $(a - d)^2 + 4bc > 0$ *şi* $ad - bc > 0$;

— şa, dacă $(a - d)^2 + 4bc > 0$ *şi* $ad - bc < 0$;

— focar, dacă $(a - d)^2 + 4bc < 0$ *şi* $a + d \neq 0$;

— centru, dacă $(a - d)^2 + 4bc < 0$ *şi* $a + d = 0$.

⌜ Se constată imediat că numărul $(a - d)^2 + 4bc$ nu este altceva decît discriminantul ecuaţiei (16.10) cu ajutorul rădăcinilor căreia s-a obţinut clasificarea în cauză. ⌟

Dacă însă revenim la cazul sistemului (16.7), se poate arăta că intervenţia termenilor de grad superior în x şi y nu modifică tipul punctului staţionar $x = 0$, $y = 0$, determinat cu ajutorul liniarizării, adică prin considerarea sistemului liniar (16.8) în locul sistemului general (16.7), decît cel mult în cazul centrului, care se poate uneori transforma într-un focar; în acest mod importanţa teoremei 16.1 depăşeşte cadrul sistemelor liniare (16.8).

Exemplul 2. Să considerăm sistemul diferenţial autonom

$$\dot{x} = x + y - x(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = -x + y - y(x^2 + y^2), \tag{16.11}$$

în care, prin comparaţie cu sistemul (16.7), avem $P(x, y) = x + y - x(x^2 + y^2)$, $Q(x, y) = -x + y - y(x^2 + y^2)$; sistemul liniar (de primă aproximaţie) va fi

$$\dot{x} = x + y, \quad \dot{y} = -x + y,$$

deci $a = b = d = 1$, $c = -1$ şi deoarece $(a - d)^2 + 4bc = -4 < 0$ iar $a + d = 2 \neq 0$, punctul staţionar $x = 0$, $y = 0$, conform cu teorema 16.1, va fi un focar (mai precis deoarece $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$, avem $p = 1$, $q = 1$, deci apare situaţia VII, în care focarul este instabil). Pentru a vedea ce se întîmplă în cazul sistemului (16.11), vom scrie

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-x + y - y(x^2 + y^2)}{x + y - x(x^2 + y^2)}$$

şi vom transcrie ecuaţia în coordonatele polare $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$; se găseşte ecuaţia cu variabile separabile $\frac{dr}{d\theta} = r(r^2 - 1)$, deci toate soluţiile ei vor fi de forma

$$r = \frac{1}{\sqrt{1 + c\exp(2\theta)}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Dacă $c = 0$, se obţine traiectoria $r = 1$, deci cercul unitate din $\mathbb{R}^2$.

Pentru $c > 0$ avem $1 + c\exp(2\theta) > 0$ şi deci r are sens pentru orice $\theta \in \mathbb{R}$; deoarece $\lim_{\theta \to -\infty} r = 1$ şi $\lim_{\theta \to +\infty} r = 0$, traiectoriile corespunzătoare se află în interiorul cercului unitate şi deci punctul staţionar $x = 0$, $y = 0$ va fi un focar iar cercul unitate constituie o curbă asimptotică pentru aceste traiectorii.

Pentru $c < 0$, r va fi real numai dacă $\theta \in \left[-\infty, -\frac{\ln|c|}{2}\right]$ şi toate traiectoriile vor fi exterioare cercului unitate ($\lim_{\theta \to -\infty} r = 1$ şi $\lim_{\theta \to -\frac{1}{2}\ln|c|} r = +\infty$); rezultă că r este o func-

ție crescătoare de variabila θ, iar traiectoriile corespunzătoare se vor apropia asimptotic de cercul unitate (cînd $\theta \to -\infty$) și vor avea o altă asimptotă dreaptă $\theta = -\frac{1}{2}\ln|c|$.

Este important de remarcat că punctele staționare ale sistemului (16.7) sînt puncte singulare ale ecuației $y' = \frac{Q}{P}$ (adică teorema de existență și unicitate nu este aplicabilă în cazul acestora) și deci teoria expusă permite studiul soluțiilor ecuațiilor diferențiale în vecinătatea punctelor singulare ale acestora. Acest studiu a fost inițiat de către H. Poincaré și continuat în diverse direcții, în ipoteza că P și Q sînt funcții de o clasă oarecare sau analitice (cu valori reale). Menționăm cîteva rezultate evidente :

— Traiectoriile ecuației $y' = \frac{Q}{P}$ se pot intersecta numai în punctele singulare ale acesteia (deoarece în punctele de intersecție nu mai este valabilă teorema de existență și unicitate).

— Punctele singulare ale acestor traiectorii sînt neapărat puncte singulare ale ecuației (în punctele ordinare ale ecuației soluția este derivabilă, deci traiectoria nu poate avea puncte singulare).

Printre rezultatele mai importante menționăm fără demonstrație următorul :

Dacă o traiectorie a sistemului (16.7) este inclusă într-un domeniu mărginit din $\mathbb{R}^2$ care conține un număr finit de puncte staționare ale acestui sistem, atunci sînt posibile trei situații :

1° traiectoria este închisă, deci $x = 0$, $y = 0$ este punct staționar de tip centru ;

2° traiectoria este o spirală, avînd ca asimptotă o curbă închisă, deci $x = 0$ $y = 0$ este un punct staționar de tip focar ;

3° traiectoria are ca punct inițial chiar punctul staționar.

16.3. Stabilitatea soluțiilor sistemelor diferențiale

16.13.1. Teoreme de stabilitate

Să presupunem că sistemul diferențial autonom (scris vectorial)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{16.12}$$

are originea $\mathbf{x} = 0$ punct staționar [conform cu 16.1 pentru aceasta este necesar și suficient să avem $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$] ; scriind (16.12) sub formă explicită

$$\dot{x}_j = f_j(x_1, \ldots, x_n), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{16.12'}$$

dacă f_j sînt de clasă C^r, $r \geqslant 1$, în vecinătatea originii, prin dezvoltare Taylor se poate scrie sistemul (16.12') sub forma

$$\dot{x}_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k + g_j(x_1, \ldots, x_n), \tag{16.13}$$

unde $a_{jk} = \frac{\partial f_j(0)}{\partial x_k}$, iar g_j sînt termenii de grad cel puțin doi în $x_1, \ldots, x_n$ care apar în dezvoltarea Taylor ; sub formă vectorială, sistemul (16.13) se scrie

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}), \tag{16.13'}$$

iar sistemul liniar și omogen cu coeficienți constanți

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{16.14}$$

obținut din (16.13') prin neglijarea termenilor care apar în $\mathbf{g}$ se numește prima aproximație (sau aproximația de ordinul întîi) a sistemului (16.12). Ca și în cazurile anterioare, tratate în 16.2, de multe ori sistemul (16.14) poate fi utilizat pentru a stabili comportarea soluției banale din punctul de vedere al stabilității.

Teorema 16.2. *Dacă* $\{\lambda_j\}$ *sînt valorile proprii ale matricei* $\mathbf{A}$ *care apare în sistemul* (16.14) *și dacă se verifică inegalitățile*

$$\operatorname{Re} \lambda_j < \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{16.15}$$

oricare ar fi valoarea proprie λ_j, *atunci este valabilă și inegalitatea*

$$\|\exp(\mathbf{A}t)\| \leqslant c \exp(\alpha t), \quad t \geqslant 0, \ c > 0. \tag{16.15'}$$

⌜ Deoarece sistemul (16.14) este liniar, omogen și cu coeficienți constanți, orice soluție a sa va fi o combinație liniară de soluții de

forma $\exp(\lambda_j t)\mathbf{p}(t)$, unde $\mathbf{p}(t) = [p_1(t), \ldots, p_n(t)]^t$, p_{kl}, $k = 1, \ldots, n$, fiind polinoame de grad cel mult $n-1$; notînd $a_j = \alpha - \operatorname{Re}\lambda_j$, din (16.15) rezultă $a_j \geqslant a > 0$ și deoarece polinoamele cresc la infinit mai încet decît $\exp(at)$, avem $|p_k(t)| \leqslant c_k \exp(at)$ și deci $|\exp(\lambda_j t)p_k(t)| \leqslant c_k \exp[(a+\operatorname{Re}\lambda_j)t] = c_k \exp(\alpha t)$. Ținînd seama că matricea fundamentală $\exp(\mathbf{A}t)$ este formată cu ajutorul unor funcții (cvasipolinoame) de forma $\sum_{j,k} \exp(\lambda_j t)p_k(t)$, inegalitatea (16.15′) este justificată. ⌟

Teorema 16.3. *Dacă toate valorile proprii ale matricei* $\mathbf{A}$ *din sistemul* (16.14) *sînt astfel încît se verifică inegalitățile*

$$\operatorname{Re}\lambda_j < 0, \tag{16.16}$$

atunci orice soluție a sistemului (16.14) *tinde la zero cînd* $t \to \infty$.

⌜ Orice soluție $x(t)$ a sistemului (16.14) se scrie sub forma $\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}(0)$; dacă pentru orice valoare proprie λ_j a matricei $\mathbf{A}$ se verifică (16.16), atunci există $\alpha < 0$ astfel încît $\operatorname{Re}\lambda_j \leqslant \alpha < 0$ și deci, în baza teoremei 16.2, vom avea $|\mathbf{x}(t)| = |\exp(\mathbf{A}t)\ x(0)| \leqslant c\|\mathbf{x}(0)\|\exp(\alpha t)$. Cum $\exp(\alpha t) \to 0$ cînd $t \uparrow +\infty$, vom avea neapărat $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = 0$. ⌟

Teorema 16.4 *(de stabilitate). Dacă* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, $p \leqslant n$, *sînt valorile proprii ale matricei* $\mathbf{A}$ *care apare în sistemul* (16.14), *atunci, notînd* $r = \max\{\operatorname{Re}\lambda_j, j = 1, \ldots, p\}$, *soluția banală* $x(t) = 0$ *a acestui sistem este*:

a) *asimptotic stabilă, dacă* $r < 0$;

b) *instabilă, dacă* $r > 0$;

c) *neasimptotic stabilă (adică stabilă sau instabilă), dacă* $r = 0$.

⌜ Afirmația a) rezultă din teorema 16.3; afirmația b) rezultă din faptul că dacă $\lambda = \mu + i\nu$, $\mu > 0$, este o valoare proprie a matricei $\mathbf{A}$, atunci cel puțin o soluție a sistemului (16.14) va avea forma $A\exp(\mu t)\operatorname{cis}(\nu t)$, care evident nu tinde la zero cînd $t \uparrow \infty$, deoarece

$$|A\exp(\mu t)\operatorname{cis}(\nu t)| = |A|\,e^{\mu t} \to \infty$$

cînd $t \to \infty$. Afirmația c) este de asemenea evidentă: va exista cel puțin o valoare proprie pur imaginară $\lambda = i\nu$, căreia îi corespund soluții care conțin sau funcțiile trigonometrice $\sin(\nu t)$, $\cos(\nu t)$ (dacă $i\nu$ este valoare proprie simplă, ceea ce corespunde la stabilitatea soluției banale) sau conțin funcții de forma $t^q \sin(\nu t)$, $t^q \cos(\nu t)$ $q \in \mathbb{N}$, (dacă $i\nu$ este valoare proprie multiplă), ceea ce conduce evident la instabilitatea soluției banale. ⌟

Luînd în considerație sistemele diferențiale de forma (16.13′), vom putea demonstra rezultate analoage teoremei de stabilitate 16.4,

considerînd însă un caz mai general, obținut prin înlocuirea ecuației vectoriale (16.3′) prin ecuația

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t, \mathbf{x}), \tag{16.17}$$

unde $\mathbf{A}$ este o matrice constantă, $\mathbf{A} \in M_n$, iar $\mathbf{g}(t, \mathbf{x}) = [g_1(t, \mathbf{x}), \ldots, g_n(t, \mathbf{x})]^t$. În prealabil vom demonstra un rezultat ajutător.

Lema 16.1 *(lema lui Gronwall). Fie* $f : [0, a] \to \mathbb{R}$, f *continuă pe domeniul de definiție și verificînd inegalitatea*

$$f(t) \leqslant \alpha + \beta\int_0^t f(s)\,ds, \quad \beta > 0,\ t \in [0, a];$$

atunci $f(t) \leqslant \alpha\exp(\beta t)$, *oricare ar fi* $t \in [0, a]$.

⌜ Funcția $g(t) = (\alpha + \varepsilon)\exp(\beta t)$ poate fi considerată soluție a ecuației diferențiale $g' = \beta g$ (dacă se alege constanta de integrare egală cu $\alpha + \varepsilon$) care este la rîndul ei echivalentă cu ecuația integrală $g(t) = (\alpha + \varepsilon) + \beta\int_0^t g(s)\,ds$, deoarece $g(0) = \alpha + \varepsilon$. Dacă se consideră $\varepsilon > 0$, atunci, comparînd inegalitatea verificată de f cu ecuația verificată de g, va rezulta $f(t) < g(t)$, $t \in [0, a]$. Într-adevăr, dacă am avea $f(t) \geqslant g(t)$ pentru $t \in [0, a_1]$, $a_1 < a$, va rezulta

$$\alpha + \beta\int_0^t f(s)\,ds \geqslant \alpha + \varepsilon + \beta\int_0^t g(s)\,ds,$$

adică va trebui să se verifice inegalitatea $\beta\int_0^t (f-g)(s)\,ds \geqslant \varepsilon$, care pentru $t = 0$ devine contradictorie: $0 \geqslant \varepsilon$. Așadar $f(t) < g(t) = (\alpha + \varepsilon)\exp(\beta t)$, oricare ar fi $\varepsilon > 0$; trecînd la limită pentru $\varepsilon \downarrow 0$, se va obține $f(t) \leqslant \alpha\exp(\beta t)$, dacă $t \in [0, a_1]$.

Este evident că $a_1 = a$, pentru că dacă se presupune că există $t_0 \in]0, a[$ astfel încît $f(t_0) = g(t_0)$, ar rezulta $f(t_0) \leqslant \alpha + \beta\int_0^{t_0} f(s)\,ds <$

$$< \alpha + \varepsilon + \beta\int_0^{t_0} f(s)\,ds \leqslant \alpha + \varepsilon + \beta\int_0^{t_0} g(s)\,ds = g(t_0),$$ deoarece $f(s) < g(s)$, $s \in [0, t_0]$, deci $f(t_0) < g(t_0)$. ⌟

Teorema 16.5. 1° *Dacă pentru sistemul* (16.17) *matricea constantă* $\mathbf{A}$ *are valorile proprii* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, $p \leqslant n$, *astfel încît* $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, $j =$

$= 1, 2, \ldots, p$, *iar vectorul* $\mathbf{g}(t, \mathbf{x})$ *este definit și continuu pentru* $t \geqslant 0$ $\|\mathbf{x}\| < a$, $a > 0$, $\mathbf{g}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ *și verifică relația* $\lim_{\|\mathbf{x}\| \to 0} \frac{\|\mathbf{g}(t, \mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0$ *uniform pentru* $t \in \mathbb{R}_+$, *atunci soluția banală* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *a acestui sistem este asimptotic stabilă.*

2° *În aceleași condiții pentru* $\mathbf{g}$, *dacă cel puțin o valoare proprie* λ_j *are partea reală pozitivă, soluția* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *a sistemului* (16.17) *este instabilă.*

3° *Dacă* $r = \max \{\operatorname{Re} \lambda_j, j = 1, \ldots, p\} = 0$, *studiul stabilității soluției banale a sistmului* (16.17) *cu ajutorul primei aproximări este imposibil (vectorul* $\mathbf{g}$ *contribuie decisiv la definirea caracterului stabil sau instabil al acestei soluții).*

⌜ 1° Este suficient să arătăm că din inegalitatea $\|\mathbf{x}(0)\| < \delta$ rezultă $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$ pentru $t \in \mathbb{R}_+$ iar $\lim_{t \to +\infty} \mathbf{x}(t) = 0$; or ecuația vectorială (16.17) împreună cu problema Cauchy $\mathbf{x}(t)\,|_{t=0} = \mathbf{x}_0$ este echivalentă cu ecuația integrală

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \exp\,[\mathbf{A}(t-s)]\;\mathbf{g}[s, \mathbf{x}(s)]\,ds,$$

din care rezultă în baza lui (16.15′)

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leqslant \|\mathbf{x}_0\|\, c \exp(\alpha t) + \int_0^{t_0} c \exp\,[\alpha(t-s)]\;\|\mathbf{g}(s, \mathbf{x}(s)\|\,ds$$

cu $c > 0$ și $\alpha < 0$.

Deoarece $\lim_{\|\mathbf{x}\| \to 0} \frac{\|g(t, \mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0$ uniform pentru $t \in \mathbb{R}_+$, avem $\|\mathbf{g}(t, \mathbf{x})\| < a\|\mathbf{x}\|$, $a > 0$, dacă $\|\mathbf{x}\| < \eta$, ceea ce antrenează

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leqslant \|\mathbf{x}_0\|\, c \exp(\alpha t) + ac \int_0^t \exp\,[\alpha(t-s)]\;\|\mathbf{x}(s)\|\,ds.$$

Înmulțind ambii membri ai acestei ultime inegalități cu $\exp(-\alpha t)$ și notînd $f(t) = \|\mathbf{x}(t)\| \exp(-\alpha t)$, aplicînd lema lui Gronwall, rezultă imediat

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leqslant \|\mathbf{x}(0)\|\, c \exp\,[(a + \alpha)t],$$

de unde, deoarece în baza definiției lui a putem să presupunem $a + \alpha < 0$, rezultă prima parte a teoremei.

Pentru a demonstra b) se scriu ecuațiile sistemului (16.17) sub forma canonică

$$\dot{z}_k = \lambda_k z_k + \eta z_{k+1} + G_k(t, \mathbf{z}),\ k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (16.18)$$

Cu ajutorul matricelor $\mathbf{T}$ și $\mathbf{H}$, definite astfel încît $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{B}$, $\mathbf{B} = [b_{jk}]$, cu $b_{jj} = \lambda_j$, $b_{j,j+1} = 0$ sau 1, $b_{jk} = 0$ în celelalte cazuri iar $\mathbf{H} = \operatorname{diag}[\eta, \eta^2, \ldots, \eta^n]$ cu $\eta > 0$, se definește $\mathbf{D} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{H} = [d_{jk}] = [b_{jk}\eta^{k-j}]$, deci $d_{jj} = \lambda_j$, $d_{j,j+1} = 0$ sau η, $d_{jk} = 0$ în celelalte cazuri. Scriind $\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{z}$, se obține din (16.17) sistemul

$$\mathbf{z}' = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{y}' = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{T}^{-1}[\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{H}\mathbf{z} + \mathbf{g}(t, \mathbf{T}\mathbf{H}\mathbf{z})] = \mathbf{D}\mathbf{z} + \mathbf{G}(t, \mathbf{z}),$$

unde $\mathbf{G}(t, \mathbf{z}) = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}(t, \mathbf{T}\mathbf{H}\mathbf{z})$, care coincide cu (16.18) (cu observația că termenul ηz_{k+1} intervine numai cînd căsuța Jordan este nediagonală).

Vom nota cu λ_j valorile proprii ale matricei $\mathbf{A}$ pentru care $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$, cu λ_z celelalte valori proprii (deci $\operatorname{Re}\lambda_k \leqslant 0$) iar $\varphi(t) = \sum_j |z_j(t)|^2$, $\psi(t) = \sum_k |z_k(t)|^2$, z_k fiind soluțiile sistemului (16.18) și se alege $\eta > 0$ astfel încît $0 < 6\eta < \operatorname{Re}\lambda_j$, oricare ar fi j; se poate găsi $\delta > 0$ suficient de mic pentru a avea $\|\mathbf{G}(t, \mathbf{z})\| < \eta\|\mathbf{z}\|$ cînd $\|\mathbf{z}\| < \delta$.

Fie $z(t)$ o soluție a sistemului $\mathbf{z}' = \mathbf{D}\mathbf{z} + \mathbf{G}(t, \mathbf{z})$ care verifică inegalitățile $\|\mathbf{z}(0)\| < \delta$ și $\psi(0) < \varphi(0)$; în baza continuității soluției $\mathbf{z}(t)$, vom avea și inegalitățile $\|\mathbf{z}(t)\| < \delta$, $\psi(t) < \varphi(t)$ pentru $t \geqslant 0$ convenabul ales și atunci, utilizînd ecuațiile (16.18) și inegalitatea lui Schwartz, vom putea scrie

$$\varphi'(t) = 2\sum_j \operatorname{Re} z_j'\bar{z}_j = 2\sum_j [\operatorname{Re}\lambda_j z_j\bar{z}_j + \eta \operatorname{Re} z_{j+1}\bar{z}_j + \operatorname{Re}\bar{z}_j G_j(t, z)],$$

$$\sum_j \operatorname{Re} z_{j+1}\bar{z}_j \leqslant \sum_j |z_j z_{j+1}| \leqslant \sqrt{\sum_j |z_j|^2 \sum_j |z_j|^2} = \varphi(t),$$

$$\sum_j \operatorname{Re}\bar{z}_j G_j \leqslant \sqrt{\sum_j |z_j|^2 \sum_j |G_j|^2} \leqslant \sqrt{\varphi(t)}\;\|\mathbf{G}\|,$$

$$\|\mathbf{G}\| \leqslant \eta\|\mathbf{z}\| = \eta\sqrt{\varphi + \psi} \leqslant 2\eta\sqrt{\varphi},$$

$$\frac{1}{2}\varphi' > 6\eta\varphi - \eta\varphi + 2\eta\varphi = 3\eta\varphi.$$

Calculele analoage conduc la inegalitatea $\frac{1}{2}\psi' \leqslant \eta\psi + 2\eta\varphi$, ţinînd seama că ψ se scrie cu ajutorul indicilor k pentru care $\operatorname{Re}\lambda_k \leqslant 0$; rezultă aşadar, notînd $4\eta\varphi = \omega(t)$, inegalităţile

$$\varphi' > 2\eta\varphi + \omega, \quad \psi' \leqslant 2\eta\psi + \omega$$

valabile pentru $t \geqslant 0$ suficient de mic, care combinate cu inegalitatea $\psi(0) < \varphi(0)$ arată că nu putem avea decît $\psi(t) < \varphi(t)$ pentru orice t. Cum este valabilă inegalitatea $\varphi'(t) > 6\eta\varphi(t)$, rezultă $\varphi(t) \geqslant \varphi(0)\exp(6\eta t)$, ceea ce înseamnă că soluţia $\mathbf{z} = 0$ (adică $\mathbf{x} = 0$), nu este stabilă, deoarece $\exp(6\eta t)$ creşte cînd $t \uparrow \infty$.

Punctul 3° al teoremei se justifică printr-un exemplu; astfel, considerînd sistemul

$$\dot{\mathbf{x}} = a\,\mathbf{I}\mathbf{x} + b\mathbf{I}\mathbf{x}^3, \quad \mathbf{x}^3 = [x_1^3, \ldots, x_n^3]^t,$$

unde $\mathbf{I}$ este matricea unitate din M_n iar $a, b \in \mathbb{R}$, este suficient să considerăm o singură ecuaţie (deoarece ecuaţiile sistemului diferă numai prin indice) şi fie aceasta $y' = ay + by^3$; apare o ecuaţie Bernoulli, iar soluţia ei va fi $y = \left[c\exp(-2at) - \frac{b}{a} \right]^{-1/2}$ dacă $a \neq 0$ sau $y = (2c - 2bt)^{-1/2}$ dacă $a = 0$. Stabilitatea soluţiei $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ a sistemului dat se poate studia în baza schemei următoare:

	a	b	Ecuaţia liniarizată $\dot{\mathbf{x}} = a\mathbf{I}\mathbf{x}$	Ecuaţia $\dot{\mathbf{x}} = a\mathbf{I}\mathbf{x} + b\mathbf{I}\mathbf{x}^3$
1	<0	$\mathbb{R}$	Asimptotic stabilă	Asimptotic stabilă
2	>0	$\mathbb{R}$	Instabilă	Instabilă
3	$=0$	<0	Stabilă	Asimptotic stabilă
4	$=0$	$=0$	Stabilă	Stabilă
5	$=0$	>0	Stabilă	Instabilă

(În situaţiile 2 şi 5 soluţia nu are valori reale pentru t suficient de mare). ⌟

Teorema 16.5 este evident aplicabilă sistemelor autonome (16.12), deoarece din modul în care s-a obţinut sistemul diferenţial (16.13) este verificată condiţia $\lim_{\|\mathbf{x}\|\to 0} \frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0$ avînd în vedere faptul că vectorul $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ se scrie sub forma

$$\sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_m(\mathbf{0})}{\partial x_k\,\partial x_j} x_k x_j + \ldots$$

şi, prin urmare, în acest caz, punctul staţionar $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ va fi asimptotic stabil pentru un sistem autonom numai dacă este asimptotic stabil pentru sistemul liniarizat corespunzător.

Teorema 16.5 rămîne valabilă şi în alte condiţii decît cele formulate în enunţ; astfel, de exemplu, dacă are loc inegalitatea $\|\mathbf{g}(t,\mathbf{x})\| \leqslant g_1(t)\|\mathbf{x}\|$ pentru $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathbf{g}$ şi g_1 fiind continue iar g_1 integrabilă pe $\mathbb{R}_+$, aceste ipoteze pot înlocui ipoteza

$$\lim_{\|\mathbf{x}\|\to 0} \frac{\|\mathbf{g}(t,\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0.$$

În particular, dacă sistemul $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ se poate pune sub forma $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1(t)$, unde $\mathbf{A}_0$ este o matrice pătrată constantă iar $\mathbf{A}_1$ o matrice pătrată continuă pentru $t \in \mathbb{R}_+$ şi verificînd condiţia $\int_0^\infty \|\mathbf{A}_1(t)\|\,dt < \infty$, atunci punctul staţionar $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ este asimptotic stabil.

16.3.2. Polinoame stabile

În baza rezultatelor din punctul precedent în situaţia în care punctul staţionar $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ este asimptotic stabil, este necesar ca valorile proprii ale matricei $\mathbf{A}$, obţinute prin liniarizarea unui sistem diferenţial, să aibă părţile reale strict negative; deoarece valorile proprii ale matricei constante $\mathbf{A}$ sînt zerourile ecuaţiei algebrice de grad n, $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$, este important de obţinut criterii directe, cu ajutorul cărora să se poată decide dacă un polinom cu coeficienţi reali are sau nu toate zerourile cu parte reală strict negativă.

Un polinom

$$p_n(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

cu coeficienţi reali este *stabil* dacă toate zerourile sale $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, $p \leqslant n$, verifică inegalităţile $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, $j = 1, 2, \ldots, p$. Fără a constitui o restricţie, vom presupune în viitor $a_0 > 0$.

Există cîteva criterii care stabilesc direct, fără calculul efectiv al zerourilor $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ dacă un polinom este stabil sau nu; în cele ce

urmează vom prezenta două dintre aceste criterii : *criteriul lui Routh-Hurwitz și criteriul lui Mihailov.*

Criteriul lui Routh-Hurwitz necesită construirea unei matrice pătrate, denumite *matricea lui Hurwitz*; această matrice are pe diagonala principală coeficienții $a_1, a_2, \ldots, a_n$ iar celelalte elemente se obțin cu ajutorul tuturor coefcienților polinomului considerat, astfel încît, dacă se notează cu **H** matricea lui Hurwitz, să avem

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{bmatrix}.$$

Se constată deci că indicele fiecărui element al acestei matrice, element situat într-o linie dată, este cu o unitate mai mic decît indicele elementului aflat în fața sa iar dacă indicele este fie negativ, fie $> n$, atunci elementele corespunzătoare sînt nule.

Minorii principali diagonali ai matricei lui Hurwitz sînt

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \ldots$$

Criteriul lui Routh-Hurwitz afirmă că polinomul p_n este stabil dacă și numai dacă sînt verificate următoarele inegalități :

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_{n-1} > 0, \Delta_n > 0. \qquad (16.18)$$

Evident, deoarece $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$, ultima inegalitate se poate înlocui cu inegalitatea $a_n > 0$; este însă clar că pentru ca polinomul să fie stabil, trebuie ca toți coeficienții lui să fie pozitivi (deoarece p_n se poate scrie sub formă de produse de polinoame stabile de grad unu sau doi, care au în mod obligatoriu coeficienții pozitivi, după cum se poate verifica ușor), dar această condiție nu este suficientă decît pentru polinoamele stabile de grad unu sau doi. Demonstrația criteriului Routh-Hurwitz nu o dăm aici.

Exemplul 3. În cazul polinomului

$$p_4(\lambda) = \lambda^4 + 5\lambda^3 + 13\lambda^2 + 19\lambda + 10,$$

care corespunde unui sistem liniar și omogen format din patru ecuații diferențiale, sau, ceea ce este același lucru, p_4 este polinomul caracteristic al ecuației diferențiale

$$y^{(4)} + 5y^{(3)} + 13y'' + 19y' + 10y = 0,$$

avem $\Delta_1 = 5$, $\Delta_2 = 46$, $\Delta_3 = 624$, $\Delta_4 = 6\,240$ și deci condițiile necesare și suficiente de stabilitate (16.18) sînt verificate. Soluția banală a sistemului (ecuației) în discuție va fi deci asimptotic stabilă.

Este evident faptul că acest criteriu conduce la calcule greoaie dacă n este mare; o simplificare a calculelor se obține prin utilizarea *condițiilor de stabilitate ale lui Liennard și Chipard*: pentru ca polinomul p_n să fie stabil, este necesar și suficient să avem

$$a_j > 0,\ j = 0, 1, \ldots, n,\ \Delta_{n-1} > 0,\ \Delta_{n-3} > 0,\ \Delta_{n-5} > 0, \ldots,$$

unde numerele Δ_j au aceeași semnificație ca și în (16.18). Condițiile lui Liennard-Chippard sînt echivalente cu cele ale lui Routh-Hurwitz, dar sînt mult mai comode deoarece necesită mai puține calcule.

Exemplul 4. Polinomul

$$p_4(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + a\lambda^2 + \lambda + b,$$

deoarece $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 2a - 4b - 1$, va fi un polinom stabil dacă se verifică inegalitățile

$$b > 0,\ 2a > 4b + 1.$$

Criteriul lui Mihailov se bazează pe faptul că punctul $p_n(i\lambda)$ din planul complex uOv descrie o curbă, astfel încît argumentul crește cu $(n - 2m)\pi$ dacă polinomul p_n are m rădăcini cu parte reală pozitivă și $n - m$ rădăcini cu parte reală negativă, în ipoteza că argumentul crește de la $-\infty$ la $+\infty$; rezultă că pentru ca polinomul p_n să fie stabil este necesar și suficient ca m să fie nul.

Astfel, dacă $p_n(z)$ este un polinom stabil, punînd $z = x + iy$, se deduce că în planul complex punctul $p_n(iy)$, cînd y variază de la 0 la $+\infty$, nu trece prin originea axelor de coordonate ci o ocolește, creșterea argumentului fiind egală (în sens pozitiv) cu $n\pi/2$.

O formulare echivalentă a criteriului lui Mihailov este următoarea : pentru ca polinomul p_n să fie stabil, este necesar și suficient ca $a_n a_{n-1} > 0$ iar rădăcinile polinoamelor

$$p(\xi) = a_n - a_{n-2}\xi + a_{n-4}\xi^2 - \ldots$$

$$q(\eta) = a_{n-1} - a_{n-3}\eta + a_{n-5}\eta^2 - \ldots$$

să fie toate pozitive, distincte și astfel încît

$$0 < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \dots$$

unde $p_n(iy) = p(y^2) + iyq(y^2)$.

Exemplul 5. Dacă $p_4(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 1$, se deduce $p(\xi) = \xi^2 - 4\xi + 1$, $q(\eta) = -\eta + 1$; deci $\xi_1 = 2 - \sqrt{3}$, $\xi_2 = 2 + \sqrt{3}$, $\eta_1 = 1$; deoarece $a_n = a_{n-1} = 1$ iar $\xi_1 < \eta_1 < \xi_2$, rezultă stabilitatea acestui polinom.

Exerciții și completări

1°. Să se determine tipul punctului staționar în cazul următoarelor sisteme diferențiale:

a) $\dot{x} = x - 2y$, $\dot{y} = x + 3y$; b) $\dot{x} = x + y$, $\dot{y} = 2x - y$; c) $\dot{x} = x - y$, $\dot{y} = 3x - y$; d) $\dot{x} = -x + 3y$, $\dot{y} = -x - 2y$; e) $\dot{x} = 5y + 2y$, $\dot{y} = 7x + 3y$; f) $\dot{x} = -3x + 7y$; $\dot{y} = \frac{5}{7}x - 2y$; g) $\dot{x} = x + y$, $\dot{y} = -x + 3y$; h) $\dot{x} = -3x + y$, $\dot{y} = -x - y$; i) $\dot{x} = 3x$, $\dot{y} = 3y$.

R. a) Focar instabil; b) punct șa; c) centru; d) focar stabil; e) nod instabil; f) nod stabil; g) nod instabil; h) nod stabil; i) nod instabil.

2°. În cazul sistemelor de mai jos să se studieze stabilitatea primei aproximări a soluției banale:

x) $\dot{x} = 3x - 22\sin y + x^2 - y^2$, $\dot{y} = \sin x - 5y + \exp(x^2) - 1$; b) $\dot{x} = -3x + y + 4y^3$, $\dot{y} = 8\sin^2 x - 2y$; c) $\dot{x} = 2x + 3y - x^3\exp(y) + \frac{1}{12}y^4$, $\dot{y} = x\cos x + 5y - \frac{1}{3}y^3$; d) $\dot{x} = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\sin y - x^3 y$; $\dot{y} = -y - 2x + x^4 - y^4$.

R. a) Stabil; b) stabil; c) instabil; d) stabil.

3°. Pentru ce valori ale parametrului a punctul staționar $x = 0$, $y = 0$ al sistemului

$$\dot{x} = x + 2y,\ \dot{y} = ax - 3y$$

este stabil?

R. $a < -\frac{3}{2}$.

4°. Aceeași problemă pentru sistemul

$$\dot{x} = -x + z,\ \dot{y} = -2y - z,\ \dot{z} = ay - z,$$

punctul staționar fiind $x = y = z = 0$.

R. $a > -2$.

5°. Să se studieze stabilitatea soluției banale în cazul ecuațiilor:

a) $y^{V} + 7y^{IV} + 3y''' + 88y'' + 122y' + 60y = 0$; b) $y^{III} - 2y'' + 3y' + 4y = 0$; c) $y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 0$; d) $y^{V} + 2y^{IV} + y''' + 2y'' + y' + 2yC = 0$; e) $6y^{IV} + 29y''' + 45y'' + 24y' + 4y = 0$.

R. a) Stabil; b) instabil; c) stabil; d) instabil; e) stabil.

6°. Pentru ce valori ale parametrilor soluția banală este stabilă:

a) $y^{IV} + ay''' + 2y'' + y' + 3y = 0$; b) $y^{IV} + 3y''' + ay'' + 2y' + by = 0$.

R. a) Nici o valoare a lui a; b) $a > \frac{2}{3}$, $b > 0$, $9b - 6a + 4 < 0$.

7°. Să se arate că dacă f este o funcție reală, definită și continuă pe intervalul $[0, a]$ și verifică inegalitatea

$$f(t) \leqslant A + \int_0^t B(s) f(s)\,ds,\ t \in [0, a],\ A \in \mathbb{R},\ B > 0,$$

continuă pentru $t \in [0, a]$, atunci $f(t) \leqslant A\exp\left(\int_0^t B(s)\,ds\right)$.

Indicație. Se urmează demonstrația lemei lui Gronwall.

CAPITOLUL 17

Probleme de oscilaţie

17.1. Teoreme de oscilaţie

În cele ce urmează se vor obţine unele rezultate relative la zerourile soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale liniare şi omogene, precum şi rezultate referitoare la unele probleme conexe problemei zerourilor. În întreg capitolul de faţă prin soluţii se vor înţelege numai soluţiile nebanale ale ecuaţiilor considerate, care vor fi de forma

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \qquad (17.1)$$

coeficienţii fiind presupuşi funcţii reale continue în $\bar{I}$, unde I este un interval deschis, de lungime arbitrară din $\overline{\mathbb{R}}$: în plus, în $\bar{I}$ vom presupune $a_0 \neq 0$, ceea ce permite înlocuirea lui a_0 cu 1 (dacă este necesară o asemenea operaţie).

Iniţial vom presupune $n = 2$ iar ecuaţiile considerate vor avea una din formele deduse în cap. 10 relativ la ecuaţiile diferenţiale liniare şi omogene de ordinul al doilea.

Teorema 17.1. *Orice soluţie a ecuaţiilor* (17.1) *cu* $n = 2$ *nu poate avea în* I *decît zerouri simple, iar mulţimea zerourilor este cel mult numărabilă, fiind finită dacă* I *are lungime finită.*

⌐ Dacă pentru $x_0 \in I$ am avea $y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{(k)}(x_0) = 0$, $k \geqslant 1$, deoarece în particular $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$, în baza

teoremei de existenţă şi unicitate, cum solutia banală verifică aceste condiţii Cauchy, altă soluţie nu mai poate exista (care să verifice condiţiile date), ceea ce contrazice faptul că se iau în consideraţii numai soluţiile nebanale.

Dacă într-un interval $[a, b] \subset I$, $b-a < \infty$, ar exista un număr infinit de zerouri pentru o soluţie $y = y(x)$; cum mulţimea $[a, b]$ este compactă, va exista, în $[a, b]$, un şir $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de zerouri convergent către $t \in [a, b]$; cum $y \in C^2[a, b]$, din $y(x_n) = 0$, $k \in \mathbb{N}$, rezultă

$$y(t) = y(\lim x_k) = \lim y(x_k) = 0,$$

$$y'(t) = \lim_{x_k \to t} \frac{y(x) - y(t)}{x_k - t} = \lim_{x_k \to t} \frac{0}{x_k - t} = 0$$

şi deci un punct de acumulare de zerouri din $[a, b]$ este un zero multiplu, ceea ce nu este posibil.

Exemplul ecuaţiei $y'' + y = 0$ arată că mulţimea zerourilor este numărabilă pentru soluţia $y(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

Problema determinării zerourilor soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale este o problemă importantă iar în acest sens este util rezultatul următor :

Teorema 17.2 *(identitatea lui Picone). Dacă* y *şi* z *sînt soluţii ale ecuaţiilor diferenţiale*

$$(py')' - qy = 0, \quad (p_1z')' - q_1z = 0, \qquad (17.2)$$

p, p', p_1, p'_1, q, q_1 *fiind funcţii continue reale,* $p > 0$, $p_1 > 0$ în I, iar

$$y(x_1) = y(x_2) = 0, \quad x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2 \text{ şi } z(x) \neq 0, \quad x \in]x_1, x_2[,$$

atunci are loc egalitatea integrală

$$\int_{x_1}^{x_2} (q - q_1)y^2 \mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} (p - p_1)y' \mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} p_1 (y' - yz'z^{-1})^2 \mathrm{d}x = 0. \qquad (17.3)$$

⌐ Funcţia $\frac{y}{z}(py'z - p_1z'y)$ este evident de clasă C^1 în $]x_1, x_2[$ iar derivata ei va fi egală cu $(q-q_1)y^2+(p-p_1)y'^2+\frac{p_1}{z^2}(zy' - yz')^2$

dacă se utilizează ecuațiile (17.2) și se adună și se scade termenul $p_1y'^2$; prin integrare rezultă că membrul stîng al lui (17.3) este egal cu

$$\frac{y}{z}(py'z - p_1z'y)\Big|_{x_1}^{x_2} = py'y\Big|_{x_1}^{x_2} - p_1z'\frac{y^2}{z}\Big|_{x_1}^{x_2}.$$

Deoarece $y(x_1) = y(x_2) = 0$, ultima diferență se anulează; se ține seama că raportul $\frac{y^2}{z}$ se anulează în x_1 și x_2 chiar dacă și z se anulează în aceste puncte, zerourile lui z fiind simple (vezi teorema 17.1) ⌟

Teorema 17.3 *(de comparație Sturm). În condițiile teoremei* 17.2 *pentru* p, p_1, q *și* q_1, *dacă* q *și* q_1 *nu sînt nule în* $]x_1, x_2[$, *atunci dacă se verifică inegalitățile*

$$p(x) - p_1(x) \geqslant 0, \quad q(x) - q_1(x) \geqslant 0, \quad x \in]x_1, x_2[\qquad (17.4)$$

iar $y(x_1) = 0$, $y(x_2) = 0$, *orice soluție a ecuației* $(p_1z')' - q_1z = 0$ *se anulează cel puțin o dată în* $]x_1, x_2[$.

⌜ Dacă $z(x) \neq 0$, $x \in]x_1, x_2[$, se poate aplica soluțiilor y și z identitatea lui Picone care nu poate fi verificată, deoarece prin ipoteză $(q - q_1)y^2 \geqslant 0$, $(p - p_1)y'^2 \geqslant 0$, $p_1 > 0$, decît dacă sînt îndeplinite egalitățile

$$(q - q_1)y^2 = 0, \quad (p - p_1)y'^2 = 0, \quad y'z - yz' = 0 \text{ în } \quad]x_1, x_2[,$$

ceea ce înseamnă în mod obligatoriu $q = q_1$ (y nu poate fi nul pe nici un subinterval din $]x_1, x_2[$), $p = p_1$ (deoarece q nu este nul pe nici un subinterval din $]x_1, x_2[$, nu putem avea $y' = 0$) și deci ecuațiile (17.2) vor coincide pe $]x_1, x_2[$. Aceasta înseamnă că y și z, fiind soluții ale aceleiași ecuații și avînd wronskianul $y'z - yz'$ nul, sînt liniar dependente, ceea ce, evident, nu se ia în considerație. Rezultă că nu se poate presupune $z(x) \neq 0$, $x \in]x_1, x_2[$ ⌟

Teorema 17.4 *(de separație Sturm). Între orice două zerouri consecutive ale unei soluții a oricărei ecuații diferențiale liniare și omogene de ordinul al doilea se află un singur zero al oricărei soluții a aceleiași ecuații, liniar independente de prima soluție.*

⌜ Dacă y_1 verifică prima ecuație (17.2) și $y(x_1) = y(x_2) = 0$, x_1 și x_2 fiind zerouri consecutive ale lui y_1, iar y_2 este liniar independentă de y_1, și se presupune $y_2(x) \neq 0$, $x \in]x_1, x_2[$, atunci se poate aplica identitatea (17.3) (în care $p = p_1$, $q = q_1$, $y = y_1$, $z = y_2$) și deci va rezulta $\int_{x_1}^{x_2} \frac{p}{y_2^2} W^2[y_1, y_2]dx = 0$, ceea ce înseamnă $W[y_1, y_2] = 0$. Această ultimă egalitate este însă contradictorie cu ipoteza de liniar independență a soluțiilor y_1 și y_2 și deci există cel puțin un punct $c \in]x_1, x_2[$ astfel încît $y_2(c) = 0$.

Dacă ar exista două astfel de puncte, conform cu prima parte a demonstrației ar rezulta că între ele trebuie să existe cel puțin un punct în care y_1 se anulează, ceea ce însă contrazice ipoteza că x_1 și x_2 sînt zerouri consecutive pentru y_1. ⌟

Dacă y este o soluție în I a ecuației diferențiale (17.1), atunci y se numește *oscilantă* (sau are *caracter oscilator*) dacă admite o infinitate numărabilă de zerouri în I.

Dacă $n = 2$, din teorema 17.1 rezultă că orice soluție oscilantă va fi definită pe un interval de lungime infinită iar din teorema 17.4 rezultă că dacă o ecuație diferențială liniară și omogenă de ordinul al doilea admite o soluție oscilantă, atunci orice altă soluție a ei este oscilantă, ceea ce permite utilizarea noțiunii de *ecuație oscilantă* pentru acele ecuații diferențiale care au toate soluțiile oscilante. Un rezultat important în aplicații se referă la caracterul oscilator al funcțiilor Bessel (vezi cap. 13).

Teorema 17.5. *Dacă* $\nu \in \mathbb{R}$, *ecuația Bessel este oscilantă în* $I =]0, +\infty[$.

⌜ Dacă în ecuația Bessel $z^2w'' + zw' + (z^2 - \nu^2)w = 0$ se face schimbarea de variabilă independentă $z = \exp(t)$, se obține ecuația $\ddot{w} + (e^{2t} - \nu^2)w = 0$. Luînd pentru comparație ecuația $\ddot{w} + w = 0$, deoarece $p = -q = 1$, $p_1 = 1$, $q_1(t) = \nu^2 - \exp(2t)$, adică $p - p_1 = 0$, $(q - q_1)(t) = \exp(2t) - \nu^2 - 1$, rezultă $(q - q_1)(t) \leqslant 0$ pentru $t \in]0, +\infty[$ și $\nu \in \mathbb{R}$; conform cu teorema 17.3, deoarece orice soluție a ultimei ecuații este oscilantă, același lucru va fi valabil și pentru orice funcție Bessel. ⌟

În unele cazuri este important de cunoscut modul în care variază valorile extreme ale unei soluții oscilante cînd $|x| \to \infty$. ⌟

Teorema 17.6. *Dacă în ecuația diferențială* $(py')' - qy = 0$ *avem* $p, q \in C^1(I)$, $p > 0$, *atunci orice soluție oscilantă* y *a acesteia care are*

valorile extreme în punctele $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $t_k < t_{k+1}$ ***verifică fie inegalitățile*** $|y(t_k)| \leqslant |y(t_{k+1})|$ *dacă* $(pq)' \geqslant 0$, *fie inegalitățile* $|y(t_{k+1})| \leqslant |y(t_k)|$ *dacă* $(pq)' \leqslant 0$, $k \in \mathbb{N}$.

⌜ În ipotezele considerate funcția $g = y^2 - \dfrac{1}{p\cdot q}(p\cdot y')^2$ este de clasă $C^1(I)$ și vom avea

$$f' = 2yy' + \frac{(pq)'}{p^2q^2}\cdot p^2y'^2 - 2\frac{1}{pq}\cdot(py')(py')' = (pq)'\left(\frac{y'}{q^2}\right)^2;$$

deci f este nedescrescătoare dacă $(pq)' \geqslant 0$ și **necrescătoare dacă** $(pq') \leqslant 0$.

În primul caz avem $f(t_k) \leqslant f(t_{k+1})$, adică $y^2(t_k) \leqslant y^2(t_{k+1})$ iar în a doua situație, din inegalitățile $f(t_k) \geqslant f(t_{k+1})$ **rezultă** $y^2(t_k) \geqslant y^2(t_{k+1})$. ⌟

În cazul ecuației Bessel $x^2y'' + xy' - (\nu^2 - x^2)y = 0$, prin împărțire cu x se obține forma autoadjunctă a acestei ecuații

$$(xy')' - \left(\frac{\nu^2}{x} - x\right)y = 0$$

și deci $p(x) = x$, $q(x) = \dfrac{\nu^2}{x} - x$; prin urmare,

$$(pq)' = (\nu^2 - x^2)' = -2x < 0, \quad \text{dacă } x \in]0, +\infty[,$$

ceea ce înseamnă că pentru orice $\nu \in \mathbb{R}$ și pentru $x > 0$ orice funcție Bessel este oscilantă iar valorile extreme descresc în valoare absolută.

Se pot stabili și unele condiții suficiente de oscilație sau neoscilație pentru soluțiile ecuațiilor diferențiale liniare și omogene de ordinul al doilea care utilizează direct coeficienții acestora.

Teorema 17.7. *Dacă în ecuația diferențială* $y'' + py' + qy = 0$ *se presupun verificate condițiile* $p, q \in C^0(I)$ *și* $q < 0$, *atunci în* I *orice soluție a acesteia admite cel mult un zero*; *dacă* $I =]a, +\infty[$, $p = 0$ *și* $\varliminf\limits_{x\to\infty} x^2q(x) > \dfrac{1}{4}$, *atunci orice soluție a acesteia este oscilantă iar dacă* $\varlimsup\limits_{x\to\infty} x^2q(x) < \dfrac{1}{4}$, *soluțiile ei nu sînt oscilante.*

⌜ Funcția $f(x) = \exp\left[\int_a^x p(t)\,dt\right] y(x)y'(x)$ este evident de clasă $C^1(I)$; derivînd, se găsește $f'(x) = (y'^2 - qy^2)\exp\left(\int_a^x p\,dt\right)$, deoarece

$yy'' = -pyy' - qy^2$, și întrucît $q < 0$ pe I, rezultă $f' \geqslant 0$, adică f este nedescrescătoare.

Dacă $y(a) = 0$, avem și $f(a) = 0$, ceea ce înseamnă $f(x) \leqslant f(a)$, dacă $x < a$ [respectiv $f(x) \geqslant f(a)$ dacă $x > a$]. Prin urmare rezultă $y(x)\,y'(x) \leqslant 0$ dacă $x < a$ [respectiv $y(x)\,y'(x) \geqslant 0$ dacă $x > a$], deci sau $y(x) > 0$, $y'(x) < 0$ sau $y(x) < 0$, $y'(x) > 0$ pentru $x < a$, ceea ce înseamnă că y este fie descrescător fie crescător la stînga lui a, adică nu se mai anulează pentru $x < a$. La fel se arată că $y \neq 0$ pentru $x > a$.

În cazul ecuației sub forma redusă $y'' + Q(x)y = 0$ se consideră ca ecuație de comparație ecuația Euler $x^2z'' + bz = 0$, $b \in \mathbb{R}$, ale cărei soluții sînt de forma x^λ, unde λ verifică ecuația $\lambda(\lambda - 1) + b = 0$, deci $\lambda = \dfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 4b})$; soluțiile ei vor fi oscilante pentru $1 - 4b < 0$, deci pentru $b > \dfrac{1}{4}$ și neoscilante pentru $b < \dfrac{1}{4}$. Așadar, în baza teoremei 17.3 (în care caz în notațiile teoremei avem $p = p_1 = 1$, $q = -\dfrac{b}{x^2}$, $q_1 = -Q$) dacă $Q(x) - \dfrac{b}{x^2} \geqslant 0$, $b > \dfrac{1}{4}$, soluțiile ecuației vor fi oscilante, ceea ce este echivalent cu condiția $\varliminf\limits_{x\to\infty} x^2q(x) > \dfrac{1}{4}$. În sfîrșit, aplicînd teorema de comparație 17.3 ecuațiilor anterioare, dar punînd $p = p_1 = 1$, $q = -Q$, $q_1 = -\dfrac{b}{x^2}$, $b \leqslant \dfrac{1}{4}$, condiția $q - q_1 \geqslant 0$ conduce la inegalitatea $\varlimsup\limits_{x\to\infty} x^2\,Q(x) < \dfrac{1}{4}$ și deci, dacă există o soluție oscilantă pentru ecuația $y'' + Qy = 0$, atunci aceeași proprietate de oscilație va trebui să apară și în cazul soluțiilor ecuației Euler $x^2z'' + bz = 0$ cu $b < \dfrac{1}{4}$, ceea ce este imposibil. ⌟

Dacă $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\,Q(x) = \dfrac{1}{4}$, teorema nu este aplicabilă și atunci pot fi utilizate inegalitățile $\varliminf\limits_{x\to\infty} x^2 \ln x\left[Q(x) - \dfrac{1}{4x^2}\right] > \dfrac{1}{4}$ (pentru oscilație) sau $\varlimsup\limits_{x\to\infty} x^2\ln^2 t + \left[Q(x) - \dfrac{1}{4x^2}\right] < \dfrac{1}{4}$ (pentru neoscilație).

În cazul ecuației Bessel $z^2w'' + zw' + (z^2 - \nu^2)w = 0$, forma redusă se obține cu ajutorul transformării $w = z^{-1/2}$ și va fi

$$y'' + \left(1 - \frac{a}{z^2}\right)y = 0, \quad a = \nu^2 - \frac{1}{2};$$

deci $Q(z) = 1 - \frac{a}{z^2}$ și cum

$$\lim_{z\to\infty} z^2 Q(z) = \lim_{z\to+\infty} (z^2 - a) = +\infty > \frac{1}{4},$$

rezultă că funcțiile Bessel cu $\nu \in \mathbb{R}$ sînt oscilante pe semiaxa $z > 0$.

Un alt rezultat care se poate demonstra utilizînd, de exemplu, transformarea lui Prüfer constă în faptul că dacă $\int_a^{+\infty} Q\,dz = +\infty$, $Q(x) \geqslant 0$, $z \geqslant a$, Q continuă, atunci ecuația $y'' + Qy = 0$ este oscilantă; în plus, dacă există $b > 0$ astfel încît $\int_a^{\infty} |Q - b|\,dx < \infty$, orice soluție a ecuației anterioare este mărginită iar dacă $\lim_{x\to\infty} Q(x) = 1$, atunci pentru șirul zerourilor $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oricărei soluții are proprietatea că $x_{n+1} - x_n \to \pi$, cînd $n \to \infty$.

În cazul ecuației Bessel, unde $q(z) = 1 - \frac{a}{z^2} \to 1$, va rezulta că diferența dintre două zerouri consecutive a oricărei funcții Bessel (cu $\nu \in \mathbb{R}$) tinde la π.

17.2. Probleme polilocale

Fie ecuația (17.5) neomogenă, scrisă sub forma

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \quad (17.5)$$

cu a_j, $f \in C^0(I)$, $j = 1, \ldots, n$. În afară de problema Cauchy, care a fost pe larg analizată pînă acum, care trebuie considerată o problemă locală (deoarece condițiile inițiale se referă la un singur punct din I iar soluția se obține în vecinătatea acestui punct), diverse probleme practice impun determinarea unei soluții a ecuației (17.5), care verifică alte condiții decît acelea care apar într-o problemă Cauchy.

De exemplu, în cazul geodezicelor pe o varietate diferențiabilă, adică curbele avînd lungimea minimă dintre toate curbele care sînt conținute în acea varietate și unesc două puncte date ale acesteia,

trebuie integrat un sistem diferențial de ordinul al doilea iar soluția va fi determinată din condiția ca să treacă prin cele două puncte date. Această problemă (ca și multe altele) conduce la definirea *problemelor polilocale*, care constă în determinarea soluțiilor ecuației (17.5) care iau valori reale date y_k în punctele $x_k \in I$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Este evident că o problemă polilocală are caracter global și din punct de vedere geometric revine la găsirea curbelor integrale din I ale ecuației (17.5) care trec prin punctele $(x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

La o problemă polilocală numărul de condiții coincide, de obicei, cu ordinul ecuației și evident sînt posibile și diverse variante ale acestei probleme. De exemplu, în punctul x_k se pot da valorile $y(x_k)$, $y'(x_k)$, $\ldots$, $y^{(n_k-1)}(x_k)$, $k = 1, 2, \ldots, p < n$, astfel încît $n_1 + \ldots + n_p = n$, și o problemă Cauchy poate fi privită ca un caz particular al problemelor polilocale.

Spre deosebire de problemele Cauchy, în general, pentru problemele polilocale nu pot fi demonstrate teoreme de existență și unicitate a soluțiilor, după cum ne arată cazul problemei bilocale $y(0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$, $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$, $x_1 > 0$, pentru ecuația $y'' + y = 0$ cînd soluția se scrie sub forma

$$y(x) = \frac{y_1 - y_0 \cos x_1}{\sin x_1} \sin x + y_0 \cos x,$$

care este justificată numai dacă $x_1 \neq n\pi$, $n \in \mathbb{N}$. Dacă x_1 este astfel încît $\sin x_1 = 0$, se verifică ușor că dacă y_1 este oarecare, soluția nu există și uneori, pentru y_1 convenabil determinat (egal de exemplu cu $y_0 \cos x_1$) soluția există dar nu este unic determinată, fiind egală cu $A \sin x + y_0 \cos x$, cu $A \in \mathbb{R}$).

Pentru a studia o problemă polilocală se poate porni de la faptul că orice soluție a ecuației (17.5) fiind de forma $y = y_h + y_p$ iar y_h conținînd n constante arbitrare, se poate presupune că cele n condiții care apar într-o problemă polilocală servesc la determinarea acestor parametri. Scriind deci

$$y = \sum_{j=1}^{n} C_j y_j + y_p, \quad W[y_1, \ldots, y_n] \neq 0, \quad (17.6)$$

condițiile $y(x_k) = y_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ conduc la sistemul algebric liniar

$$\sum_{j=1}^{n} C_j y_{jk} = y_k - y_p(x_k), \quad k = 1, \ldots, n, \quad (17.6')$$

în care $y_{jk} = y_j(x_k)$, deci problema polilocală poate fi analizată din punctul de vedere al sistemelor algebrice liniare, în care rolul prin-

cipal îl joacă matricea $\mathbf{H} = [y_{jk}] \in M_n$, numită *matrice Haar* a problemei în cauză; dacă matricea Haar este nesingulară, atunci, evident, problema polilocală în studiu admite o singură soluție (în I).

În particular, dacă ecuația (17.5) devine omogenă, adică dacă $f = 0$ în I și $y_k = 0$, $k = 1, \ldots, n$, această soluție va fi soluție banală.

Teorema 17.8 *Dacă* det $\mathbf{H} \neq 0$, *atunci*

a) *orice două soluții ale ecuației* (17.5) *care se intersectează în n puncte* $P_j(x_j, y_j)$, $x_j \in I$, $x_j \neq x_k$, $j \neq k$, $j, k = 1, 2, \ldots, n$ *coincid*;

b) *două traiectorii distincte ale ecuației* (17.5) *pot avea doar maximum* $n-1$ *puncte de intersecție.*

⌜ Dacă u și v verifică ecuația (17.5) iar $u(x_j) = v(x_j)$, $j = 1, \ldots, n$, atunci funcția $u - v$ verifică ecuația omogenă corespunzătoare lui (17.5) iar $(u-v)(x_j) = 0$, $j = 1, \ldots, n$; cum det $\mathbf{H} \neq 0$, neapărat $u - v = 0$, deci $u = v$ (în I) și punctul a) este justificat. Punctul b) este evident o consecință a punctului a). ⌟

Punctul b) al teoremei 17.8 este important mai ales prin reciproca sa:

Dacă orice două traiectorii distincte ale ecuației (17.5) *au cel mult* $n-1$ *puncte comune, atunci matricea Haar* $\mathbf{H}$ *este nesingulară*, pentru orice sistem liniar independent de soluții particulare ale ecuației (17.5) omogene și orice alegere a punctelor $x_1, \ldots, x_n$ distincte din I.

Într-adevăr, dacă det$\mathbf{H} = 0$, se pot determina soluții nenule ale ecuației omogene care se anulează de n ori în I, ceea ce este totuna cu a spune că ecuația neomogenă (17.5) admite soluții distincte ale căror grafice au n puncte comune în $I \times \mathbb{R}$.

Un rezultat important arată că dacă se consideră punctele $\{x_j\}$ ordonate, $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, atunci dacă $x_n - x_1$ este suficient de mic, neapărat det$\mathbf{H} \neq 0$.

Teorema 17.9 *(de la Vallée-Poussin). Dacă în ecuația* (17.5) *coeficienții* $a_1, \ldots, a_n$ *și termenul liber* f *sînt funcții continue în* $[x_1, x_n]$, *notînd* $M_j = \max_{x \in [x_1, x_n]} |a_j(x)|$, $j = 1, \ldots, n$, *și* h_0 *rădăcina pozitivă a ecuației algebrice*

$$P_n(h) = M_1 \frac{h}{1!} + M_2 \frac{h^2}{2!} + \ldots + M_n \frac{h^n}{n!} - 1, \qquad (17.7)$$

vom avea det $\mathbf{H} \neq 0$, *dacă* $x_n - x_1 = h < h_0$.

⌜ Deoarece polinomul P_n definit prin (17.7) verifică relațiile $P_n(0) = -1 < 0$, $P_n(+\infty) = +\infty$, va exista sigur $h_0 \in \mathbb{R}$, $h_0 > 0$, astfel încît $P_n(h_0) = 0$, iar dacă $0 < h < h_0$, avem $P_n(h) < 0$ și $P_n(h) > 0$,

dacă $h > h_0$. Pentru a demonstra teorema, conform cu o observație anterioară, va fi suficient să arătăm că orice două traiectorii diferite ale ecuației (17.5) au în comun cel mult $n-1$ puncte. Fie deci y_1 și y_2 două soluții ale ecuației date ale căror grafice se taie într-un interval de lungime h de n ori, ceea ce face ca funcția $y = y_1 - y_2$ care verifică ecuația (17.5) omogenă să aibă n zerouri în acel interval. În baza teoremei lui Rolle funcțiile $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ vor avea în intervalul considerat respectiv $n-1$, $n-2$, $\ldots$, 1 zerouri.

Fie $t \in [x_1, x_n]$, astfel încît $y^{(n-1)}(t) = 0$ și să notăm $m = \max_{x_1 \leqslant x \leqslant x_2} |y^{(n-1)}(x)|$; în baza unui rezultat cunoscut (vezi exercițiul 1) vor rezulta inegalitățile

$$\int_{x_1}^{x_n} |y^{(n-2)}|\,dx \leqslant m\frac{h^2}{2!}, \int_{x_1}^{x_n} |y^{(n-3)}|\,dx \leqslant m\frac{h^3}{3!}, \ldots, \int_{x_1}^{x_2} |y|\,dx \leqslant m\frac{h^n}{n!}, \qquad (17.8)$$

pe care le vom utiliza pentru evaluarea membrului drept al egalității

$$\left|\int_{t_1}^{t} y^{(n)}\,dx\right| = \left|-\int_{t_1}^{t} [a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots]\,dx\right|$$

dedusă din ecuația (17.5) omogenă. Avem

$$|y^{(n-1)}(t) - y^{(n-1)}(t_1)| \leqslant M_1 \int_{t_1}^{t} |y^{(n-1)}|\,dx + M_2 \int_{t_1}^{t} |y^{(n-2)}|\,dx + \ldots$$

$$\ldots + M_n \int_{t_1}^{t} |y|\,dx \leqslant M_1 \int_{x_1}^{x_n} |y^{(n-1)}|\,dx + \ldots + M_n \int_{x_1}^{x_n} |y|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant M_1 mh + M_2 m\frac{h^2}{2!} + \ldots + M_n m\frac{h^n}{n!}$$

și considerînd t_1 ales astfel încît $|y^{(n+1)}(t_1)| = m$, se obține inegalitatea

$$m \leqslant M_1 mh + M_2 m\frac{h^2}{2!} + \ldots + M_n m\frac{h^n}{n!},$$

care, după simplificare cu $m > 0$, conduce la inegalitatea $P_n(h) \geqslant 0$, ceea ce înseamnă $h \geqslant h_0$. Prin urmare, dacă $h < h_0$ cele două grafice nu se pot intersecta decît de maximum $n-1$ ori. ⌟

17.3. Șiruri ortogonale de funcții Bessel

Utilizînd rezultatele obținute la 17.1, se poate deduce o clasă nouă de funcții ortogonale pe un interval I de lungime finită

(de obicei $I =]0, l[$, $l > 0$), formată cu ajutorul funcțiilor Bessel (vezi cap. 13).

Teorema 17.10. a) *Dacă u și v sînt soluții ale ecuațiilor diferențiale (Bessel)*

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + (\lambda^2x^2 - \nu_1^2)u = 0,$$
$$x^2\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + (\mu^2x^2 - \nu_2^2)v = 0 \tag{17.9}$$

atunci este valabilă egalitatea

$$\int_a^b \left[(\lambda^2 - \mu^2)\,x + \frac{\nu_1^2 - \nu_2^2}{x}\right] uv\,\mathrm{d}x = \left[x\left(u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\right]_a^b. \tag{17.9'}$$

b) *Dacă J_ν este o funcție Bessel de speța I, cu $\mathrm{Re}\,\nu > -1$, au loc identitățile*

$$(\lambda^2 - \mu^2)\int_0^x t\,J_\nu(\lambda t)\,J_\nu(\mu t)\,\mathrm{d}t = x\,[\mu\,J_\nu(\lambda x)\,J_\nu'(\mu x) - \lambda\,J_\nu(\mu x)\,J_\nu'(\lambda x)], \tag{17.10}$$

$$\int_0^x t\,J_\nu^2(\lambda t)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\left[J_\nu'^2(\lambda x) - J_\nu(\lambda x)\,J_\nu''(\lambda x) - \frac{1}{\lambda x}J_\nu(\lambda x)J_\nu'(\lambda x)\right] =$$
$$= \frac{x^2}{2}\left[J_\nu'^2(\lambda x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{\lambda^2x^2}\right)\right]J_\nu^2(\lambda x). \tag{17.10'}$$

⌜ Egalitatea (17.9') se obține înmulțind prima ecuație (17.9) cu $\frac{v}{x}$, a doua ecuația (17.9) cu $\frac{u}{x}$, efectuînd apoi diferența acestor două egalități și integrînd între a și b. Egalitatea (17.10) se obține din (17.9') pentru $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, $a = 0$, $b = x$, ținînd seama că $\frac{\mathrm{d}J_\nu(\lambda x)}{\mathrm{d}x} = \lambda J_\nu'(\lambda x)$ etc. Condiția $\mathrm{Re}\,\nu > -1$ este obligatorie pentru convergența integralelor, care sînt improprii pentru intervalul $]0, l[$. Prima egalitate (17.10') se deduce din (17.10) prin împărțire cu $\lambda^2 - \mu^2$ și trecînd la limită, pentru $\mu \to \lambda$, aplicîndu-se regula lui l'Hospital iar ultima egalitate se obține prin utilizarea ecuației $\lambda^2x^2J_\nu''(\lambda x) + \lambda xJ_\nu'(\lambda x) + (\lambda^2x^2 - \nu^2)J_\nu(\lambda x) = 0$ verificată de funcția $J_\nu(\lambda x)$. ⌟

Deoarece egalitățile (17.9'), (17.10), (17.10') s-au obținut direct din ecuația Bessel, este evident că acestea vor fi valabile și pentru orice alte funcții Bessel.

Teorema 17.11. *Dacă $\nu \in \mathbb{R}$ și $\nu > -1$, funcțiile Bessel J_ν nu pot avea decît zerouri reale.*

⌜ Dacă $\nu \in \mathbb{R}$, coeficienții lui J_ν sînt reali și deci dacă $J_\nu(z_0) = 0$, atunci $J_\nu(\bar{z}_0) = 0$, în ipoteza $z_0 \in \mathbb{C}$, iar dacă $\nu > -1$, punînd $x = 1$, $\lambda = z_0$, $\mu = \bar{z}_0$, în egalitatea (17.10) se obține relația

$$4i\,\mathrm{Re}\,z_0 \cdot \mathrm{Im}\,z_0 \int_0^1 t\,|\,J_\nu(z_0t)\,|^2\,\mathrm{d}t = 0$$

care se verifică numai dacă sau $\mathrm{Re}\,z_0 = 0$ sau $\mathrm{Im}\,z_0 = 0$. Or, dacă $\mathrm{Re}\,z_0 = 0$, deci dacă $z_0 = ia$, $a \in \mathbb{R}$, vom avea

$$J_\nu(ia) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k + \nu + 1)}\left(\frac{ia}{2}\right)^{2k+\nu} =$$
$$= (i)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,\Gamma(k + \nu + 1)}\left(\frac{a}{2}\right)^{2k+\nu} \neq 0$$

pentru că seria are termenii pozitivi și deci singura posibilitate rămîne $\mathrm{Im}\,z_0 = 0$, deci $z_0 \in \mathbb{R}$. ⌟

Teorema 17.12. *Dacă $(\mu_k^\nu)_{k\in\mathbb{N}}$ este șirul zerourilor pozitive ale funcției Bessel J_ν cu $\nu > -1$, atunci șirul de funcții $\left(J_\nu\left(\mu_k^\nu\frac{x}{l}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ este un șir ortogonal pe intervalul $[0, l]$, $l > 0$, cu pondere x și este valabilă relația*

$$\left(J_\nu\left(\mu_k^\nu\frac{x}{l}\right), J_\nu\left(\mu_j^\nu\frac{x}{l}\right)\right)_{\rho=x} = \delta_{kj}\cdot\frac{l^2}{2}J_\nu'^2(\mu_k^\nu) = \delta_{kj}\frac{l^2}{2}J_{\nu+1}^2(\mu_k^\nu). \tag{17.11}$$

⌜ Punînd în egalitatea (17.10) $x = l$, $\lambda = \frac{\mu_k^\nu}{l}$, $\mu = \frac{\mu_j^\nu}{l}$, se obține relația (17.11) pentru $k \neq j$, deoarece $\lambda^2 - \mu^2 = \frac{1}{l^2}[(\mu_k^\nu)^2 - (\mu_2^\nu)^2] \neq 0$, dacă $j \neq k$, zerourile funcțiilor Bessel fiind simple (deoarece verifică o ecuație diferențială liniară de ordinul al doilea); utilizînd egalitatea (17.10') în ipoteza $x = l$, $\lambda = \frac{\mu_k^\nu}{l}$, se obține prima egalitate (17.11) pentru $j = k$, iar deoarece $J_\nu'^2(\mu_k^\nu) = J_{\nu+1}^2(\mu_k^\nu)$, în baza relațiilor de reeurență verificate de funcțiile Bessel, se obține și a doua egalitate (17.11) pentru $k = j$. ⌟

Teorema 17.12 permite dezvoltarea oricărei funcții continue pe porțiuni în intervalul $[0, l]$ în serie de funcții $\left(J_\nu\left(\mu_k^\nu\frac{x}{l}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$;

vom avea

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_\nu\left(\mu_k^\nu \frac{x}{l}\right), \quad a_k = \frac{2}{l^2 J_{\nu+1}^2(\mu_k^\nu)} \int_0^l x f(x) J_\nu\left(\mu_k^\nu \frac{x}{l}\right) dx,$$

seria fiind convergentă în medie către f. Nu dăm aici demonstrația completitudinii șirului în cauză în $L_2(0, l)$.

Deoarece proprietatea de ortogonalitate a șirului $\left(J_\nu\left(\mu_k^\nu \frac{x}{l}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ a fost stabilită cu ajutorul egalității (17.10), aceeași egalitate arată că șirurile $\left(J_\nu\left(\lambda_k^\nu \frac{x}{l}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sînt ortogonale cu pondere $\rho(x) = x$ pe intervalul $[0, l]$, dacă λ_k^ν, $k \in \mathbb{N}$ sînt zerourile distincte pozitive, fie ale funcției J_ν', fie ale funcției f_ν, $\nu > 0$, unde $f_\nu(x) = AxJ_\nu'(x) + B \cdot J_\nu(x)$, $A, B \in \mathbb{R}$ (faptul că funcția J_ν' are o infinitate de zerouri pozitive rezultă din teorema lui Rolle iar aceeași proprietate pentru f_ν rezultă din exercițiul 6).

Exerciții și completări

1°. Dacă $f \in C^n[a, b]$, $b - a = h$, $f(x_j) = 0, j = 1, \ldots, n$, $x_j \neq x_k$, $j \neq k$, atunci $\int_a^b |f|\,dx \leqslant m \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$, unde $m = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|$.

Rezolvare. Se scrie $g(x) = f(x) - \frac{A}{n!}(x - x_1) \ldots (x - x_n)$, determinîndu-se A astfel ca g să se anuleze de $n + 1$ ori în $[a, b]$, ceea ce înseamnă că există $t \in]a, b[$ astfel încît $g^{(n)}(t) = 0$. Rezultă $A = f^{(n)}(t)$ și dacă x este cel de-al $n + 1$-lea zero pentru g, atunci $g(x) = 0$, deci $f(x) = \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - x_1) \ldots (x - x_n)$, adică

$$\int_a^b |f|\,dx \leqslant \frac{m}{n!} \int_a^b |(x - x_1) \ldots (x - x_n)|\,dx \leqslant m \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$$

deoarece

$$\int_a^b |(x - x_1) \ldots (x - x_n)|\,dx \leqslant \frac{h^{n+1}}{n+1}$$

în baza faptului că dacă se scrie

$$F(x) = \int_a^b |x - x_j|\,\psi(x)\,dx, \quad \psi(x) = |(x - x_1) \ldots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \ldots (x - x_n)|,$$

valoarea maximă a lui F se obține cînd x_j este la una din extremitățile intervalului $[a,b]$, deoarece $F'(x_j) = \int_a^{x_j} \psi\,dx - \int_{x_j}^b \psi\,dx$, $\psi \geqslant 0$, deci $F(x_j)$ descrește, $F'(a) < 0$, apoi crește, $F'(b) > 0$, deci are un singur minim în $]a, b[$, avînd în vedere că $F''(x_j) = \psi(x_j) \geqslant 0$. Avem

$$\int_a^b |(x - x_1) \ldots (x - x_n)|\,dx \leqslant \int_a^b (x - a)^k (b - x)^{n-k} dx =$$

$$= h^{n+1} \int_0^1 t^k (1 - t)^{n-k}\,dt = \frac{h^{n+1}}{n+1} \frac{k!\,(n-k)!}{n!} \leqslant \frac{h^{n+1}}{n+1}.$$

2°. Să se arate că teorema de separație nu este adevărată pentru ecuații diferențiale liniare de ordin $n \geqslant 3$.

Indicație. Ecuația diferențială $y''' - y'' + y' - y = 0$ admite două soluții oscilante $\sin x$ și $\cos x$ și una neoscilantă $\exp(x)$.

3°. Ecuația $(\sin x - \cos x)y'' - 2 \sin x\, y' + (\sin x + \cos x)y = 0$ admite soluțiile $\sin x$ și $\exp(x)$. Să se explice de ce nu este aplicabilă teorema de separație.

Indicație. Scriind ecuația sub formă autoadjunctă, coeficienții ei nu mai sînt continui în $\mathbb{R}$.

4°. Să se indice un procedeu de determinare a numărului de zerouri ale soluției ecuației $y'' + q(x)y = 0$ într-un interval dat $[a, b] \subset \mathbb{R}$, dacă $0 < m^2 \leqslant q(x) \leqslant M^2$.

Indicație. Se consideră ecuațiile de comparație $z'' + m^2 z = 0$, $u'' + M^2 u = 0$, ale căror soluții au un număr determinat de zerouri într-un interval dat.

5°. Să se arate că dacă $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots < b$ iar $y(x_j) = 0$, unde $y'' - q(x)y = 0$, funcția q fiind continuă și crescătoare în $[a, b]$, atunci $0 < x_2 - x_1 < x_3 - x_2 < x_4 - x_3 < \ldots$

Indicație. Se notează $d = x_2 - x_1 > 0$; funcția $z(x) = y(x - d)$ va avea zerouri în $x_2, x_2 + d, x_3 + d, \ldots$ și va verifica ecuația $z'' - q(x - d)z = 0$, iar rezultatul se obține aplicînd teorema de comparație, ținînd seama că $q(x) > q(x - d)$.

6°. Dacă $\nu \in \mathbb{R}_+$, să se arate că între două zerouri pozitive consecutive ale lui J_ν se află un singur zero al funcției $f_\nu(x) = AxJ_\nu'(x) + BJ_\nu(x)$.

Rezolvare. Notînd $g_\nu(x) = J'^2(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) J_\nu^2(x)$, dacă $0 \leqslant \nu < x_1 < x_2$, $J_\nu(x_1) = J_\nu(x_2) = 0$ rezultă $g_\nu(x) > 0$, $x \in]x_1, x_2[$, ceea ce antrenează $\frac{d}{dx}\left[x \cdot \frac{J_\nu'(x)}{J_\nu(x)}\right] = -x \frac{g_\nu(x)}{J_\nu^2(x)} < 0$, deci $x \frac{J_\nu'(x)}{J_\nu(x)}$ descrește de la $+\infty$ la $-\infty$ cînd x parcurge intervalul $]x_1, x_2[$, deci ia orice valoare reală o singură dată, ceea ce înseamnă că f_ν are un singur zero în $]x_1, x_2[$ dacă $x_1 \geqslant \nu$. Considerînd egalitatea $[x^2 g_\nu(x)]' = 2x J_\nu^2(x) \geqslant 0$, $\nu \geqslant 0$, rezultă că dacă x_0 este cel mai mic zero al lui J_ν, atunci cum $\lim_{x\to\infty} \frac{x J_\nu'(x)}{J_\nu(x)} = \nu$ și $\frac{d}{dx}\left[\frac{x J_\nu'(x)}{J_\nu(x)}\right] \leqslant 0$, $\frac{xJ_\nu'(x)}{J_\nu(x)}$ descrește de la ν la $-\infty$ cînd x crește de la zero la x_0.

Bibliografie

1. Arnold, V. *Équations différentielles ordinaires*. Moscou, Éditions Mir, 1974.
2. Beals, R. *Advanced Mathematical Analysis*. New York-Heidelberg-Berlin, Springer-Verlag, 1973.
3. Chilov, G. *Analyse mathémyatique*. Moscou, Éditions Mir, 1973.
4. Doetsch, G. *Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformations und der Z-transformation*. München-Wien, R. Oldenburg, 1967.
5. Hartman, P. *Ordinary Differential Equations*. New York-London-Sydney, Wiley, 1964.
6. Kiesewetter, H., Maess, G. *Elementare Methoden der numerischen Mathematik*. Wien-New York, Springer-Verlag, 1974.
7. Kolmogorov, A., Fomin, S. *Éléments de la théorie des fonctions et d'analyse fonctionnelle*. Moscou, Editions Mir, 1974.
8. Kratzer, A., Frantz, W. *Transzendente Functionen*. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft, 1960.
9. Myskis, A. D. *Advanced Mathematics for Engineers*. Moscow, Mir Publishers, 1975.
10. Pontreaghin, L. S. *Obiknovennie differenţialnie uravnenia*. Moscova, GIFML, 1961.
11. Sansone, G. *Equazioni differentiali nel campo reale*. Vol. I, II. Bologna 1949,
12. Sirovich, L. *Techniques of Asymptotic Analysis*. New York-Heidelberg-Berlin, Springer-Verlag, 1971.
13. Stoer, J., Bulirsch, R. *Einführung in die Numerische Mathematik*. vol. II. Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1973.
14. Teodorescu, N., Olariu, V. *Ecuaţii fizicii matematice*. Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1970.
15. Walter, W. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1972.